

# Revista cubana de Física

Taller de Complejidad en Física  
Enero 9-12 2006

Sociedad Cubana de Física  
Facultad de Física, Universidad de La Habana



## Instrucciones a los autores

1. Los manuscritos enviados a la RCF son contribuciones originales que no están bajo la consideración de otra revista. Deben ajustarse a las instrucciones y formato de la plantilla que se proporciona, a descargar del sitio [www.fisica.uh.cu/biblioteca/revcubfi/index.htm](http://www.fisica.uh.cu/biblioteca/revcubfi/index.htm) usando cualquier versión de Microsoft Office Word. Hay un formato para artículos/revisiones y otro para divulgación, con instrucciones que difieren, contenidas en el cuerpo de la plantilla, **que debe ser leído detenidamente** para evitar retrasos posteriores. *Los manuscritos que no se ajusten a las especificaciones de la plantilla serán devueltos sin iniciar proceso.*
2. También es posible solicitar el envío de la plantilla por correo electrónico al editor correspondiente.
3. La revista publica artículos de tres categorías (a) de revisión, conciliados previamente con el Consejo Editorial, con una extensión máxima de 10 páginas; (b) de investigación, con un máximo de 6 páginas; (c) de divulgación, con extensión no mayor de 6 páginas.
4. Se aceptan artículos en español e inglés.
5. El procedimiento de arbitraje consta de un sólo paso. El Comité Editorial, oído el criterio de los árbitros, aceptará o rechazará el artículo de forma definitiva. En caso de aceptación, y de acuerdo al arbitraje, el artículo podrá ser remitido al autor para correcciones.
6. Enviar el manuscrito, preferentemente por correo electrónico, a [rcf@fisica.uh.cu](mailto:rcf@fisica.uh.cu) o por correo ordinario (en este caso dos copias + copia en formato electrónico en diskette ó CD) a la dirección que aparece mas abajo:  
Editor Revista Cubana de Física  
Facultad de Física  
Universidad de la Habana  
San Lázaro y L, La Habana 10400  
Cuba.



La Revista Cubana de Física (*RCF*), publica artículos originales de investigación, revisión y divulgación en el campo de la Física.

**Editor**

María Sánchez Colina  
Facultad de Física,  
Universidad de la Habana 10400  
San Lázaro y L, Vedado  
Ciudad de la Habana. Cuba  
maruchy@fisica.uh.cu

**Editores asociados**

Víctor Fajer Ávila  
Ernesto Altshuler  
Augusto González  
Oscar Díaz Rizo  
Roberto Mulet  
Arnaldo González

**Edición formato electrónico**

Arnaldo González  
arnaldo@fisica.uh.cu

<b>Editorial</b> .....	77	<b>Activity in ant colonies</b> , C. Noda, J. Fernández. C. Pérez-Penichet, E. Atshuler, .....	114
<b>El problema de los matrimonios estables con información incompleta</b> , Alejandro Lage y R. Mulet .....	80	<b>Morfogénesis de patrones formados por electrodeposición</b> , E. J. Suárez-Domínguez, E. Izquierdo, E. Tejera, J.A. Llanos-Pérez, L.I. Ledesma, J. A. Betancourt-Mar, R. Quintana y J. M. Nieto, .....	118
<b>Difusión de epicentros: modelo de red dinámica</b> , R. Gámez, A. Posadas, F. Luzón, O. Sotolongo, .....	86	<b>Experiencias en la enseñanza de la física de los sistemas complejos en la cátedra “Henri Poincaré”</b> Oscar Sotolongo Costa, .....	127
<b>Solar activity waiting time distribution function for different spatial and temporal scales phenomena</b> , Adolfo L. Méndez y R. E. Rodríguez .....	93	<b>Complejidad: lo bueno, lo malo y lo feo</b> , Ernesto Alshuler, .....	135
<b>El cerebro como sistema complejo: estimación de la conectividad cerebral</b> , Eduardo Martínez Montes, Agustín Lage Castellanos, Erick Canales Rodríguez, Yasser Iturria Medina, y Pedro A. Valdés Sosa, .....	97	<b>Redes complejas: una perspectiva simple</b> , R. Mulet, .....	139
<b>Caos clásico: un enfoque histórico</b> , Alfo José Batista Leyva, .....	107		

*“Las matemáticas se pueden comparar con un molino de ejecución exquisita, capaz de moler su materia prima hasta cualquier grado de fineza; pero, no obstante, lo que Ud. obtenga dependerá de que lo que Ud. introduzca, y así como el mejor molino del mundo nunca podrá producir harina de trigo a partir de vainas de guisantes, páginas de fórmulas nunca conseguirán un resultado concluyente a partir de datos imprecisos”.*

Thomas Henry Huxley (1825-1895),  
biólogo británico, famoso por su apoyo  
a la teoría de la evolución de Charles Darwin.

## Editorial

En los días del 9 al 12 de enero del 2006 se celebró en La Habana, en el Palacio de las Convenciones, el III Seminario Bienal Internacional acerca de las implicaciones filosóficas, epistemológicas y metodológicas de la Teoría de la Complejidad. Uno de los talleres paralelos incluidos en el evento fue el Taller Paralelo de Complejidad en Física, coauspiciado por la Cátedra de Sistemas Complejos “Henri Poincaré”, donde se presentaron posters y ponencias de distintos grupos e investigadores que desarrollan su labor en relación con este importante campo del saber.

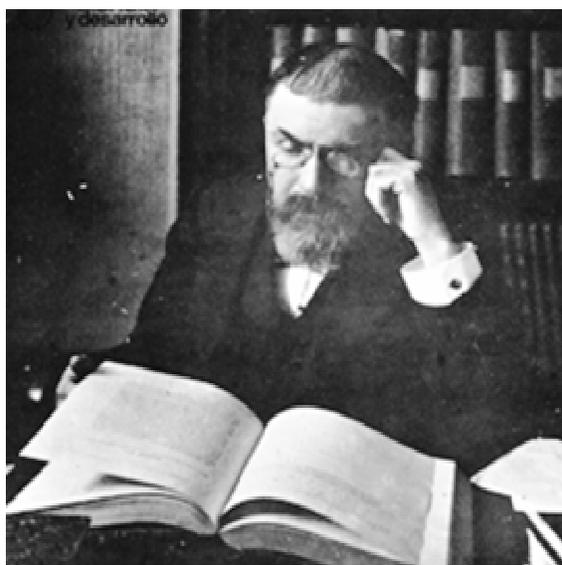
Hemos entendido conveniente, por su importancia y por la trascendencia que ha tenido esta reunión de “físicos de la complejidad” en este evento, y su interacción con otros profesionales con visiones sobre la complejidad diferentes y a veces lejanas de la nuestra, seleccionar algunas de las ponencias y trabajos expuestos en este taller y solicitar del comité editorial de la Revista Cubana de Física que un número de la misma sea dedicado a publicar estos trabajos. Así, además, la labor de divulgación de la Cátedra se multiplica. Agradecemos al Comité editorial de la revista este gesto de cedernos el primer número del 2006 para este propósito.

Los primeros trabajos en la Facultad de Física de la UH relacionados con la física de los fenómenos complejos se realizaron a principios de los años 90 y estuvieron vinculados a la física de la combustión de los sprays de combustibles en las cámaras de combustión. A partir de entonces, los conceptos de ley de escala, fractal, invariancia de escala, etc., comienzan a introducirse de manera claramente irreversible en las investigaciones de la Facultad. Algunos grupos que fundamentalmente habían venido trabajando en problemas de mecánica de fluidos vieron en el problema de la optimización de la combustión por diferentes vías no sólo un problema económico vital sino además un serio problema físico susceptible de ser estudiado con métodos y conceptos nuevos, como en efecto se demostró al relacionar la eficiencia de la combustión con el grado de autosemejanza de la distribución de gotas en el spray.

Posiblemente pueda marcarse esa época como la del comienzo en nuestro país de lo que pudiéramos llamar la “Física de los fenómenos complejos”.

Dada la evidente necesidad de divulgar y desarrollar los temas de la complejidad en física, se inaugura oficialmente la cátedra el 25 de junio del 2002, y desde

entonces se ha mantenido realizando actividades docentes e investigativas, nucleando diversos profesionales interesados en la aplicación de los nuevos métodos y enfoques en los más disímiles campos de actividad.



Henri Poincaré

Es significativo que se inaugure precisamente en la Facultad de Física, que en estos años ha demostrado su capacidad de formar profesionales con un perfil muy amplio y capaces de abordar tareas de muy diversa índole profesional. Posiblemente esta formación, unida a nuestra cubana vocación ecléctica que ha incorporado a nuestro acervo cultural desde la creación de novedosos resultados en biomedicina a nivel mundial hasta el culto a Babalú-Ayé pasando por la homeopatía y la energía piramidal, haya propiciado la creación de esta Cátedra, destinada a incorporar al acervo de los diferentes profesionales nuevos métodos y conceptos caracterizados por la sinergia con campos diversos, y a definir como objetos de estudio sistemas que hasta hace poco se pensaban lejos de la acción del físico: Llamémosles “sistemas complejos” y tratemos de dar una idea de qué entenderemos por sistemas o, mejor, por fenómenos complejos, a reservas de que en este número de la revista otros ponentes mas autorizados disertarán con profundidad

sobre el tema.

La complejidad es un concepto nacido de nuestra experiencia diaria y lo hemos usado en los contextos más diversos. Por ejemplo, los físicos nos referiríamos a fenómenos como la caída libre o el movimiento de un péndulo como fenómenos relativamente “sencillos”, mientras que nuestro sistema económico, el lenguaje, el cerebro de los mamíferos, (aunque haya algunos que aparenten no tenerlo) etc., constituyen sistemas “complejos”. Si algo parece haber de común en todos estos sistemas, es no sólo la existencia de un gran número de partículas sino, fundamentalmente las correlaciones entre las diferentes partes del sistema, lo que podríamos llamar una dinámica “coordinada”.

No es difícil observar que en todos los sistemas donde existe este tipo de correlación hallamos estructuras. Por ejemplo, las sociedades se ordenan conforme a determinados sistemas políticos. No faltan tampoco estructuras en el dominio estrictamente espiritual como en el lenguaje, la música y hasta en la ciencia. Muchas veces estamos tan habituados a la presencia de estas estructuras que hemos dejado de ser conscientes del milagro de su existencia. Nuestros antepasados les atribuían un origen divino. Así, durante mucho tiempo la ciencia se ocupó casi exclusivamente de la configuración de las estructuras, no de su formación. El interés de investigar la génesis es en realidad reciente. El estudio de estas génesis nos conducirá a una comprensión adecuada de lo complejo.

Por otro lado, desde la década de los 60 y gracias a la introducción progresiva de las computadoras, somos testigos de la introducción de nuevos métodos para la descripción de la naturaleza. Desarrollos que se producían en forma paralela en distintas ramas de la física convergen finalmente y demuestran que la separación entre lo “simple” y lo “complejo”, entre el “orden” y el “desorden” es mucho menor de lo que había parecido hasta ahora.

En la actualidad se sabe que incluso ejemplos sencillos, sacados del currículo de pregrado, pueden presentar un comportamiento complejo. Un péndulo, impulsado por una fuerza pulsante periódica presenta eventualmente una rica variedad de posibilidades de movimiento entre las que se cuentan separaciones casuales y turbulentas de la posición de equilibrio. Sistemas convencionales tales como una capa de fluido o una mezcla de reactivos químicos pueden dar lugar, bajo determinadas condiciones, a fenómenos de auto-organización de dimensiones macroscópicas en forma de estructuras espaciales o de ritmos temporales. En otras palabras, el comportamiento complejo se encuentra en un proceso de penetración de las ciencias físicas y parece profundamente enraizado en las leyes de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento.

Para el estudio de estos problemas son componentes esenciales la matemática, particularmente la teoría de probabilidades, las ecuaciones diferenciales y la geometría fractal, así como ramas de la física como la mecáni-

ca estadística y la termodinámica. Por eso, a pesar del carácter multidisciplinario de esta nueva ciencia, que se ocupa del estudio del caos y los sistemas fuera del equilibrio, es el físico uno de los profesionales que en estos momentos parece estar mejor preparado para enfrentarla. (Es por eso que la Cátedra de Sistemas Complejos “Henri Poincaré” surge de la Facultad de Física).

El papel de Henri Poincaré en el desarrollo de esta nueva ciencia es innegable. Fue él el primero en introducir los métodos cualitativos de estudio de las ecuaciones diferenciales. Es el genial iniciador de los trabajos actuales sobre la relación entre determinismo y predictibilidad, trabajos suscitados por la famosa sensibilidad infinita a las condiciones iniciales. Uno de los rasgos del genio de Poincaré es su forma de estudiar los grandes problemas clásicos de forma totalmente original. Así, desarrolló la Topología o “análisis situs”, disciplina de la que el matemático alemán Riemann había comenzado a forjar sus bases desde 1851 y que estudia las propiedades invariantes de los sistemas ante deformaciones continuas.

Precisamente su intuición geométrica lo llevó a la introducción de los métodos cualitativos de análisis de las ecuaciones diferenciales cuando estudiaba el problema de la estabilidad del sistema solar. Su inmortal obra “Nuevos Métodos de la Mecánica Celeste” es un paradigma de intuición matemática a la vez que de rigor en el estudio de problemas de elevada complicación en su formulación diferencial. Sus métodos son hoy de uso común en el estudio de sistemas dinámicos, que unidos a los métodos computacionales han permitido el impenitente desarrollo de la ciencia del caos y la sinérgica. Los conceptos que introdujo mantienen plena vigencia y muchos de los teoremas y conceptos de la teoría de sistemas dinámicos llevan su nombre. Su aporte a esta rama del saber fue impresionante.

No en balde, al fallecer Poincaré, el matemático francés Paul Painlevé expresó: “*Por primera vez este cerebro sin igual conocerá el reposo*”.

Los trabajos de Poincaré no fueron valorados en su justa medida en su tiempo. No podía ser de otra manera. El ulterior desarrollo de esta teoría requería de un conjunto mínimo de medios que facilitaran el estudio de sistemas dinámicos concretos y, sobre todo, del surgimiento de problemas concretos que merecieran esta formulación. Poincaré representó un grupo de matemáticos que, en el siglo XIX, elaboraron creaciones que chocaban con los puntos de vista imperantes en la época.

No sólo se trata de la introducción de la sensibilidad infinita a las condiciones iniciales. Ejemplos como la curva de Peano (una curva que llena el plano), el conjunto de Cantor (un conjunto de puntos que a pesar de ser dispersos dan una medida no nula), la curva de Von Koch (una curva que es continua pero no tiene tangente) y otras creaciones semejantes eran consideradas como “monstruosidades” por los matemáticos de la época. Parecían más excepciones que la regla. Hoy sabemos

que la regla es precisamente la existencia de problemas no integrables con propiedades descritas por esos conjuntos y esas curvas.

Pero en aquella época todavía quedaban muchos problemas integrables y lineales que resolver: Todo el desarrollo de la electricidad y la electrónica, la balística, la mecánica cuántica, la teoría de la relatividad, el láser, en fin, casi todo el cuerpo teórico y experimental de lo que hoy llamamos “física moderna”. Sin embargo, fue precisamente esta física la que hizo surgir la necesidad de nuevos métodos de estudio al poner de relieve la insuficiencia de los métodos tradicionales.

La Teoría Electromagnética, basada en las ecuaciones de Maxwell, es lineal. La electrodinámica de medios no lineales choca con dificultades tan gigantescas como la mecánica de fluidos. En efecto, la dinámica del plasma se revela como una fluidodinámica en la cual los problemas de estabilidad y turbulencia son enormes. Esto ha limitado (y al parecer continuará limitando) los éxitos en los intentos de confinamiento magnético del plasma para obtener la reacción termonuclear controlada.

Pocos problemas de mecánica cuántica son solubles exactamente. Problemas tan importantes como los átomos multielectrónicos, los condensados de partículas y las redes de osciladores no lineales requieren de solución numérica.

La teoría de los gases no pudo pasar del gas ideal. La introducción de interacciones en un modelo para un gas lo convierte en un problema insoluble, o sea, imposible de hallar su ecuación de estado. El gas de Van der Waals es una honrosa excepción en la que, sin embargo, se obtienen resultados absurdos. Además, la teoría cinética de los gases nos lleva a situaciones que estremecen las propias bases de la física: Si las ecuaciones de la mecánica son reversibles, las moléculas del aire de la habitación en que usted lee estas líneas pudieran en cualquier momento agruparse en un rincón, dejándolo a usted sin aire. Repetimos: desde el punto de vista mecánico no hay razón para que esto no ocurra... *pero no ocurre*.

Aunque en la mecánica ya se conocían antes de Poincaré dispositivos infinitamente sensibles a las condiciones iniciales, como el caso de un péndulo sujeto a un muelle, estos sistemas por su complejidad matemática casi no se estudiaban. Aunque ciertamente era posible desarrollar su formulación lagrangiana, de ahí a seguir su movimiento distaba mucho.

El desarrollo de los circuitos electrónicos comenzó a dar otros sistemas de este tipo: circuitos no lineales con comportamiento inestable e impredecible a pesar de describirse por ecuaciones deterministas. Además los circuitos electrónicos son un paradigma de lo que conocemos por “ruido”, al que en el pasado siglo XX todos nos acostumbramos. Todos somos hijos del siglo del

ruido. Particularmente del ruido electrónico, omnipresente en nuestros receptores de radio y TV, en nuestros ordenadores, en los circuitos de transmisión de energía, en los relojes de cuarzo y hasta en los marcapasos. Este tipo de ruido es característico de los sistemas lejos del equilibrio, para los cuales la física estadística en su formulación tradicional es impotente.

Así, las dificultades en los métodos clásicos y el desarrollo técnico obligaron a los científicos a modificar sus puntos de vista: se hizo necesario recurrir a métodos aproximados de solución, hasta el punto de que hoy es casi imposible prescindir de la computadora en las investigaciones. No es posible subrayar demasiado el papel de estos instrumentos. John Von Neumann, un genio matemático de renombre universal, descubridor de los principios fundamentales de las modernas computadoras electrónicas, comprendió desde el principio que la computadora ofrecía unas posibilidades técnicas enormes, entre las que se destacaba su capacidad de procesar un sinnúmero de datos de medición. Desde ahora podemos darnos cuenta de la importancia que esto tiene, por ejemplo, para la meteorología. Pudiéramos pensar, como hizo Von Neumann, que el establecimiento de una vasta red de observaciones meteorológicas en todo el planeta transmitidas a una computadora central debería permitir pronosticar el tiempo meteorológico sobre la base de las ecuaciones del movimiento de los fluidos. Pero a pesar de que la red de puntos de observación es cada vez más densa y las computadoras son cada vez más potentes, los pronósticos desde el tiempo de Von Neumann no han mejorado espectacularmente.

La cada vez mayor penetración de las computadoras en la labor del físico y, además, del resto de la sociedad, la presencia cada vez más constante y omnipresente de los nuevos medios de comunicación, han imprimido a la ciencia y la tecnología un impulso nunca antes visto y revolucionado a tal punto nuestras vidas y actividad como profesionales (entre otras cosas) que la palabra « complejidad » ha tenido que surgir en diferentes contextos, por lo que no es de extrañar que en esta etapa histórica haya diferentes comprensiones de la misma. Esperamos que la exposición de estos trabajos aquí compendiados contribuya a poner más en claro cuales son los aspectos que, al menos en el campo de la física, forman parte de la complejidad y podamos abrir grietas en la torre de Babel que hoy existe, contribuyendo al logro de un lenguaje común entre distintos grupos de profesionales que se mueven alrededor de este campo.

Si eso se logra, habremos avanzado mucho.

*Dr. Oscar Sotolongo Costa  
Presidente Cátedra de Sistemas  
Complejos « Henri Poincaré »*

## El problema de los matrimonios estables con información incompleta

Alejandro Lage y Roberto Mulet<sup>a</sup>

Depto. Física Teórica, Facultad de Física, Universidad de la Habana, lage@fisica.uh.cu  
a) Cátedra de Sistemas Complejos Henri Poincaré, San Lázaro y L, Ciudad de la Habana, Cuba, mulet@fisica.uh.cu

Recibido el 1/06/2006. Aprobado en versión final el 1/12/2006.

**Sumario.** Se presenta el Problema de los Matrimonios junto a algunos resultados y algoritmos. Se define el problema con información incompleta  $G(c)$  y se demuestran algunos teoremas que lo hacen equivalente a un problema con información incompleta  $G'(c=1)$ . Basados en eso calculamos la probabilidad  $P_s^G(c)$  de encontrar al menos un estado estable en el que todos los jugadores estén casados en  $G(c)$ . Se calcula la conectividad crítica  $C^c$  que define el rango  $(C^c \dots 1]$  de conectividades en las que es posible asignar matrimonios de forma estable a todos los jugadores.

**Abstract.** After a brief introduction to the Stable Marriage Problem (SMP) and to some known algorithms and results, we define the SMP with incomplete information  $G(c)$ . We show that it can be turned into an equivalent problem  $G'(c=1)$  with complete information. This equivalence will be used to derive an analytic expression for the probability  $P_s^G(c)$  of having at least one stable state where every player is married in the incomplete information game  $G(c)$ . The range of connectivities  $(C^c \dots 1]$  defines the games with incomplete information where it is reasonable to look for a stable state where every player is married. An analytic expression is given for  $C^c$ .

**Palabras clave.** Social systems 89.65.-s, Game theory 02.50.Le.

### 1 Introducción

La segunda mitad del siglo XX vivió el nacimiento y la consolidación de la Teoría de Juegos como modelo de sistemas económicos, sociales y biológicos. Surgida en 1944 a partir de los trabajos de John von Neuman, la teoría de juegos se define hoy como un campo de las matemáticas aplicadas enfocado a la descripción de sistemas de muchos agentes con intereses conflictivos. Su estudio ha merecido varios premios Nobel en Ciencias Económicas, entre ellos el de John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selte en 1994 y más recientemente el otorgado a Thomas Schelling y Robert Aumann en el

año 2005. Desde la década de los 80 el campo también se ha vuelto común entre los físicos, especialmente aquellos que se dedican a la modelación de sistemas económicos, sociales o biológicos<sup>1-6</sup>, y a aquellos que estudian problemas de optimización<sup>7-9</sup>. En este artículo estudiamos un problema de la Teoría de Juegos conocido como el Problema de los Matrimonios Estables.

Un juego se entiende como un conjunto  $\{i = 1, 2, \dots, N\}$  de jugadores o agentes, cada uno de los cuales tiene, a su vez, un conjunto  $S_i$  de acciones o estrategias posibles a tomar y una función costo asociada que depende de la estrategia escogida por el jugador en cuestión y de la

escogida por los demás jugadores. Un estado del juego corresponde a una adopción de una estrategia por cada jugador. Los agentes se consideran racionales en el sentido de que intentarán en todo momento adoptar la estrategia que minimice su función costo. Como ocurre habitualmente en la vida común, el resultado beneficioso o perjudicial de las acciones de cada jugador no depende sólo de la estrategia escogida por él, sino también de aquellas que adoptaron los demás, sobre las cuales no tiene poder de decisión. Por esto, de forma general los jugadores no tendrán una única estrategia óptima sino que la mejor de sus acciones variará en dependencia de las decisiones tomadas por los demás jugadores. Un ejemplo clásico es la bolsa de valores<sup>1,2</sup> donde hay que decidir entre vender o comprar acciones, y lo más conveniente será hacer aquello que menos jugadores hacen.

## 2 Equilibrio de Nash

El concepto clave de esta teoría es el de Equilibrio de Nash y se debe a John Nash<sup>12</sup>. Si un estado  $\Pi^* = \{s^*_1, s^*_2, \dots, s^*_N\}$ , donde el jugador  $i$ -ésimo esta jugando la estrategia  $s^*_i \in S_i$ , es tal que todo agente está jugando la mejor de sus respuestas a las decisiones de los demás, entonces  $\Pi^*$  es un *Equilibrio de Nash*. Tales estados perduran en el tiempo pues ningún jugador se ve tentado a desviarse de su comportamiento, dado que  $s^*_i$  es la estrategia que minimiza su función costo

$$\forall i \quad \forall s \in S_i \quad U_i(s^*_1, s^*_2, \dots, s^*_i, \dots, s^*_N) \leq U_i(s^*_1, s^*_2, \dots, s, \dots, s^*_N) \quad (1)$$

tomando fijas las estrategias de los demás. La definición vino acompañada de la demostración del *Teorema de Nash*<sup>12</sup> que asegura la existencia de dichos estados (pueden ser más de uno) en cualquier juego si se incluye una definición un poco más amplia de estrategia que la dada hasta aquí.

Es importante señalar que la estabilidad definida según Nash es un concepto estático y no implica que la dinámica de los juegos conduzca a estados estables en el sentido de Nash.

## 3 Problema de los Matrimonios Estables

Este problema aborda desde el punto de vista de la teoría de juegos la situación en la que dos conjuntos X e Y de igual tamaño tienen que ser dispuestos en parejas (x,y) tomando en consideración las opiniones de cada elemento respecto a los del otro grupo. En su planteamiento más didáctico los conjuntos se asocian a hombres y mujeres, y las parejas se llaman matrimonios, de lo cual le viene el nombre al problema.

Una instancia de nuestro problema viene dada por:

1. Un conjunto de N hombres y de N mujeres.

2. Para cada jugador (hombre o mujer) existe una lista ordenada de los elementos del otro sexo que refleja sus preferencias (ver Tabla I).

Las decisiones de ambos sexos consisten en la elección de una pareja. El costo  $x_{i,j} = U_i(M_j)$  que tiene para el hombre  $i$ -ésimo estar casado con la mujer  $j$ -ésima es el lugar que ocupa dicha mujer en su lista de preferencias, y análogamente se define el costo  $y_{j,i}$  para la mujer  $j$ -ésima.

En todo el tratamiento que sigue las listas de preferencia se consideran ordenadas aleatoriamente, de forma que no hay correlación entre la valoración de distintitos jugadores. De ser posible, cada jugador se casaría con la primera persona en su lista, pero la aleatoriedad hará que rara vez un hombre y una mujer se tengan ambos como los primeros en sus listas. Esta frustración es una característica típica de los sistemas desordenados<sup>8,9</sup>.

Un estado del problema es una asignación de parejas  $\Pi = \{(H_1, M_{\pi_1}), (H_2, M_{\pi_2}), \dots, (H_N, M_{\pi_N})\}$  en la que todos los elementos están casados con un y sólo un elemento del sexo opuesto. En la Tabla I se muestra una instancia del problema de los matrimonios para N=4.

Tabla I				
Matrices de Preferencias para los hombres y las mujeres. N=4				
Hombres				
Preferencia	1	2	3	4
H <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>
H <sub>2</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>
H <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>
H <sub>4</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>4</sub>
Mujeres				
Preferencia	1	2	3	4
M <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>1</sub>	H <sub>3</sub>
M <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>4</sub>
M <sub>3</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>1</sub>
M <sub>4</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>1</sub>	H <sub>4</sub>

Los físicos suelen identificar la función costo de la teoría de juegos con una "energía" de forma que los intentos de minimizar el costo de los jugadores sean congruentes con la minimización de la energía. En el estado  $\Pi = \{(H_1, M_2), (H_2, M_3), (H_3, M_4), (H_4, M_1)\}$ , por ejemplo, el hombre H1 se encuentra en su mejor situación con una energía  $x_{1,\pi_1} = x_{1,2} = 1$  pues la mujer M<sub>2</sub> es la primera de su lista de preferencias, mientras que M<sub>2</sub> se encuentra con una energía

$y_{\pi_1,i} = y_{2,1} = 2$  pues H<sub>1</sub> es el segundo de su lista. La energía media de los hombres y las mujeres se define como

$$X_{\Pi} = \frac{1}{N} \sum x_{i,\pi_i} \quad \text{y} \quad Y_{\Pi} = \frac{1}{N} \sum y_{\pi_i,i}$$

respectivamente y la energía total de un estado como  $E_{II} = X_{II} + Y_{II}$ .

## 4 Matrimonios Estables y Equilibrio de Nash

Dado un estado cualquiera  $II$  la pareja del hombre  $H_i$  y la mujer  $M_j$  se llamará Inestable si:

1. El hombre  $H_i$  y la mujer  $M_j$  **no son** un matrimonio en el estado actual.
2. Tanto el hombre  $H_i$  como la mujer  $M_j$  preferirían formar pareja el uno con el otro que con sus actuales cónyuges.

En el estado antes ilustrado, la pareja  $(H_2, M_4)$  es una Pareja Inestable, pues  $H_2$  prefiere a  $M_4$  antes que a su esposa  $M_3$ , y  $M_4$  prefiere a  $H_2$  antes que a su esposo  $H_3$ . En la vida real esto sería suficiente para que ocurra el divorcio en los matrimonios a los que pertenecen  $H_2$  y  $M_4$  y estos formen un nuevo matrimonio ganando ambos en felicidad. Como bien se ilustra las Parejas Inestables conducen a la reconfiguración de los estados si se considera a los jugadores actuando racionalmente. Un Equilibrio de Nash será, por tanto, un estado que no contenga ninguna Pareja Inestable, pues ningún jugador encontrará algo mejor que hacer que quedarse con su actual pareja. En otras palabras, un tal estado será estable respecto a las acciones individuales de los jugadores, de aquí que también se le llame Matrimonio Estable a un estado de Equilibrio de Nash. El problema de los matrimonios estudia la existencia y propiedades de los estados de equilibrio de Nash.

## 5 Algoritmo Gale Shapley

Dada una instancia del problema como la antes descrita el conjunto de los estados posibles tiene  $N!$  elementos, de los cuales, por necesidad, alguno  $II^0$  es el de menor energía total  $E^0 = E_{II^0}$ . Este estado es el que la termodinámica predice como el de equilibrio a temperatura  $T=0$ . Las simulaciones demuestran que de forma general  $II^0$ , que coincide con el óptimo social (el estado en que las personas son más felices como promedio), no es estable según Nash. Esta situación se repite mucho en teoría de juegos y tiene la primera lectura de que los óptimos sociales son inestables respecto al accionar egoísta de los jugadores<sup>6,10</sup>. Usando métodos de la física de sistemas desordenados Mezard y Paris<sup>8</sup> han probado que  $\bar{E}^0 = 1.617\sqrt{N}$ , mientras que por métodos probabilísticos<sup>10</sup> se ha probado que el estado estable en que la gente es más feliz como promedio tiene una energía  $\bar{E} = 2\sqrt{N}$ . En ambos casos la barra indica la promediación de la magnitud sobre el desorden congelado, en este caso sobre el conjunto de listas de preferencia.

Por otra parte dada cualquier instancia de este problema, siempre existe al menos un equilibrio de Nash, y por lo general existen muchos<sup>10,11</sup>. Las

propiedades estadísticas de estos estados y su dependencia con  $N$  han sido ampliamente estudiadas<sup>6,10,11</sup>. En torno a este campo hubo también mucho trabajo de científicos de la computación<sup>13,14</sup> en el diseño de algoritmos que permitieran hallar de forma eficiente todos los estados estables en una instancia. De particular interés es el algoritmo de Gale y Shapley<sup>13</sup>, en el que se demuestra que hay una forma muy sencilla de encontrar un estado estable. La misma se basa en dividir los sexos por roles: los hombres proponen matrimonio, las mujeres esperan en casa. Todos los hombres, mientras estén solteros propondrán matrimonio a las mujeres por orden de preferencia en sus listas. Las mujeres esperarán a recibir proposiciones y aceptarán siempre que estén solteras, o que su actual cónyuge sea menos gustado que el nuevo pretendiente. En este último caso, las mujeres dejan a un hombre por otro y el abandonado continúa proponiendo a las mujeres de su lista. El algoritmo termina cuando el último hombre soltero se casa.

El resultado del algoritmo no depende del orden en que se implemente, y siempre conduce a un mismo estado estable según Nash. En el ejemplo de la Tabla I, en el primer paso  $H_1$  propondría a  $M_2$  y sería aceptado,  $H_2$  propondría a  $M_4$  y también sería aceptado,  $H_3$  propondría a  $M_4$  que lo rechazaría pues prefiere a  $H_2$ , y  $H_4$  propondría a  $M_3$  que lo aceptaría. En el segundo paso sólo queda  $H_3$  soltero quien pasa a proponer matrimonio a la segunda mujer de su lista,  $M_1$ , quien lo acepta y termina el algoritmo dando como resultado el estado  $\Pi^{GS} = (H_1, M_2), (H_2, M_4), (H_3, M_1), (H_4, M_3)$  en el cual se puede comprobar que no hay ninguna pareja inestable.

Se puede probar que en ningún otro estado estable ningún hombre se encuentra casado con una mujer más gustada que la que le corresponde en  $\Pi^{GS}$ . Es decir,  $\Pi^{GS}$  es el estado óptimo para los hombres, mientras que, también se prueba, es el pésimo para las mujeres. En valor medio la energía de los hombres y las mujeres vienen dadas por<sup>8</sup>:

$$\bar{X}^{GS} = \log N \quad \bar{Y}^{GS} = \frac{N}{\log N} \quad (2)$$

Esto demuestra que la actitud activa ante la toma de decisiones es mucho más ventajosa que la pasiva. Por supuesto, uno puede invertir el rol de los sexos en el algoritmo de Gale Shapley y obtener el estado óptimo para las mujeres que es el pésimo para los hombres. Si estos dos estados coinciden, entonces la instancia en cuestión tendrá solo un estado estable. Si no coinciden pueden existir muchos más estados intermedios entre uno y otro.

## 6 Información incompleta

Entre las muchas generalizaciones que ha tenido el problema de los matrimonios, una posible es la restricción de la información en el siguiente sentido: las listas de preferencias pueden estar incompletas, de forma

que hay ciertas posibles parejas (que pudieran ser las mejores) de las cuales no se tiene criterio porque se les desconoce. La motivación es clara: muy a nuestro pesar, sólo conocemos una pequeña fracción de las mujeres (hombres) de nuestra edad. Desde el punto de vista económico el problema de los matrimonios se usa como modelo del mercado laboral, y la información incompleta refleja el hecho de que la adquisición de información cuesta tiempo y recursos, por lo cual tanto los empleados como los empleadores conocen sólo una fracción de sus opciones posibles.

Una primera pregunta a hacerse es cómo depende la felicidad media de la cantidad de información que se tiene<sup>4</sup>. Si bien la ausencia de información puede hacer que desconozcamos a cierta pareja con la cual estaríamos muy a gusto, tiene en cambio la ventaja de reducir la competencia, pues ahora la cantidad de personas que conoce a la mujer más gustada en nuestra lista es menor. Las simulaciones y los resultados analíticos demuestran que siempre es preferible la abundancia de información, aunque venga acompañada de más competencia<sup>4</sup>. Otra pregunta interesante es la dependencia del número de estados estables en función de la información disponible por los jugadores<sup>11</sup> o si es posible o no tener al menos una configuración de equilibrio de Nash. Esta última cuestión es la que abordamos aquí.

Llamaremos conectividad,  $c$ , a la fracción de elementos del sexo opuesto que cada jugador conoce. El caso  $c=1$  corresponde al de información completa, mientras que  $c=0$  es el caso en que hay un desconocimiento total de los elementos de sexo opuesto, y por tanto no existen estados de ningún tipo. Para un valor fijado de  $c$ , los elementos desconocidos se escogen al azar con probabilidad  $1-c$  a partir de la lista completa. Una instancia del problema con información  $c=0.5$  es la siguiente:

Aquí se han removido la mitad de los elementos (aparecen tachados) a partir de las matrices de preferencias del ejemplo anterior (Tabla I). En este caso parejas como  $(H_1, M_2)$  no son posibles porque sus elementos no se conocen. Diremos que una pareja  $(H, M)$  es inestable si:

1. H y M se conocen.
2. Tanto H como M se prefieren mutuamente a sus actuales cónyuges.

El equilibrio de Nash con información limitada seguirá siendo el estado en el que no existen Parejas Inestables. Queremos determinar la probabilidad  $P_{es}(c)$  de que se pueda asignar parejas a los jugadores de forma que se obtenga un estado estable en el que todo el mundo se encuentra casado.

Para calcular  $P_{es}(c)$  demostramos una equivalencia entre el problema con información incompleta y un problema con información completa. Usando resultados previos del problema con información completa, obtenemos una expresión para  $P_{es}(c)$ .

Llamemos  $G(c)$  una instancia del problema con información incompleta (ver Tabla II). Definamos  $G'$  la

instancia que se obtiene cuando se reordena una de las matrices de preferencias (la de los hombres, por ejemplo) de forma que todos los elementos desconocidos se ponen después de los conocidos en  $G(c)$ , y estos mantienen su orden relativo como se muestra en la Tabla III.

<b>Tabla II</b>				
Instancia del problema $G(c=0.5)$ . Los elementos desconocidos aparecen tachados.				
Hombres				
Preferencia	1	2	3	4
$H_1$	$M_2$	$M_1$	$M_3$	$M_4$
$H_2$	$M_4$	$M_3$	$M_1$	$M_2$
$H_3$	$M_4$	$M_4$	$M_2$	$M_3$
$H_4$	$M_3$	$M_2$	$M_1$	$M_4$
Mujeres				
Preferencia	1	2	3	4
$M_1$	$H_2$	$H_4$	$H_1$	$H_3$
$M_2$	$H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_4$
$M_3$	$H_2$	$H_4$	$H_3$	$H_1$
$M_4$	$H_2$	$H_3$	$H_1$	$H_4$

A cada estado  $\Pi$  del problema  $G(c)$  le corresponde el mismo estado  $\Pi$  en el problema  $G'$  en el que ahora todos los hombres están casados con una de sus primeras  $cN$  mujeres, pues entre  $cN+1$  y  $N$  están ubicadas las mujeres desconocidas en el problema  $G(c)$ , que no pueden por tanto pertenecer a ningún estado. En cambio si  $\Pi$  es un estado cualquiera en  $G'$ , solo será un estado en  $G(c)$  si cumple la condición  $\forall_i x'_i \leq cN$ . En ese caso diremos que  $\Pi \in G(c)$ .

<b>Tabla III</b>				
Instancia $G'$ derivada de la instancia de la Tabla II con conectividad $c=0.5$ . La matriz de los hombres se ha reordenado y se considera nuevamente el caso con información completa.				
Hombres				
Preferencia	1	2	3	4
$H_1$	$M_1$	$M_4$	$M_2$	$M_3$
$H_2$	$M_1$	$M_2$	$M_4$	$M_3$
$H_3$	$M_4$	$M_3$	$M_1$	$M_2$
$H_4$	$M_3$	$M_2$	$M_1$	$M_4$
Mujeres				
Preferencia	1	2	3	4
$M_1$	$H_2$	$H_4$	$H_1$	$H_3$
$M_2$	$H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_4$
$M_3$	$H_2$	$H_4$	$H_3$	$H_1$
$M_4$	$H_2$	$H_3$	$H_1$	$H_4$

Probemos el siguiente teorema:

**T0:** Si  $\Pi \in G(c)$ , entonces una pareja  $(H, M)$  es inestable en  $G(c)$  si y solo si es inestable en  $G'$ .

Demostración: Notemos primero que a los efectos de la inestabilidad de una pareja solo importa si H y M se gustan más mutuamente que lo que gustan de sus actuales cónyuges, es decir, solo importa la posición relativa en la lista de preferencias. Hay dos casos a analizar. Si los jugadores H y M se conocen en  $G(c)$ , entonces las posiciones relativas de los elementos

conocidos no cambi6 al pasar de  $G(c)$  a  $G'$  y por tanto tampoco cambia el an6lisis de la conveniencia de formar un nuevo matrimonio (H,M). Si los elementos H y M no se conocen, entonces nunca ser6n una pareja inestable en  $G(c)$  (ver definici6n), y tampoco lo ser6n en  $G'$  pues H est6 casado en el estado actual con una mujer que conoce, y por tanto ocupa una de las  $cN$  primeras posiciones en sus listas, mientras que M est6 despu6s de la posici6n  $cN$  por lo cual nunca H la preferir6 a su actual pareja. LQQD.

Usando el anterior teorema se pueden demostrar de forma sencilla los siguientes:

**T1:** Si un estado es estable en  $G(c)$ , lo es en  $G'$ .

**T2:** Si un estado  $\Pi$  estable en  $G'$  pertenece a  $G(c)$ , entonces tambi6n es un estado estable en  $G(c)$ .

**T3:** Si el resultado  $\Pi^{GS}$  del algoritmo Gale Shapley en  $G'$  pertenece a  $G(c)$ , entonces tambi6n es el resultado del algoritmo Gale Shapley en  $G(c)$ .

**T4:** Si  $\Pi^{GS} \notin G(c)$  entonces no hay ning6n estado estable en  $G(c)$  donde todos los jugadores est6n casados.

El 6ltimo teorema se demuestra por reducci6n al absurdo a partir de T1. Supongamos que existe un estado estable  $\Pi$  en  $G(c)$ . Como  $\Pi^{GS} \notin G(c)$ , al menos un hombre en el estado  $\Pi^{GS}$  termin6 casado con una mujer que ocupa una posici6n entre  $cN+1$  y  $N$  en su lista en  $G'$ . En el estado  $\Pi$ , que en virtud de T1 tambi6n es estable en  $G'$ , este hombre se encuentra con una mujer m6s gustada, lo cual contradice que  $\Pi^{GS}$  sea el 6ptimo para los hombres en  $G'$ . LQQD.

Otra forma de escribir T4 nos ser6 6til a la hora de calcular la probabilidad de que existan estados estables con informaci6n limitada:

**T4 (Corolario):** El problema  $G(c)$  tiene al menos un estado estable si y solo si el resultado del algoritmo Gale Shapley en  $G'$  pertenece a  $G(c)$ .

Hemos hecho una equivalencia entre la existencia de estados estables en el problema con informaci6n incompleta y cierta propiedad del estado 6ptimo para los hombres en el problema con informaci6n completa derivado. Este resultado no fuera muy 6til para calcular

$P_{es}(c)$  de no ser por el siguiente:

**T5:** Las propiedades estadísticas del problema derivado  $G'$  son las mismas que la del problema de los matrimonios con informaci6n completa y listas de preferencias aleatorias.

Esto se debe a que el reordenamiento hecho en las listas de preferencias no implica ninguna correlaci6n entre las listas. De esta forma todas las expresiones obtenidas para el problema de los matrimonios son v6lidas para los problemas derivados. En la ref. [10] se demuestra que la probabilidad de encontrar un hombre con energía  $q$  en un estado estable donde las mujeres tienen una energía media de  $r$ , es:

$$P_H(q) = \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{q-1} \frac{r}{N} \quad (3)$$

Adem6s, como citamos antes, es un resultado conocido que en el estado  $\Pi^{GS}$  las mujeres tienen como promedio una energía  $r = \bar{Y}^{GS} = \frac{N}{\log N}$ . Vamos a

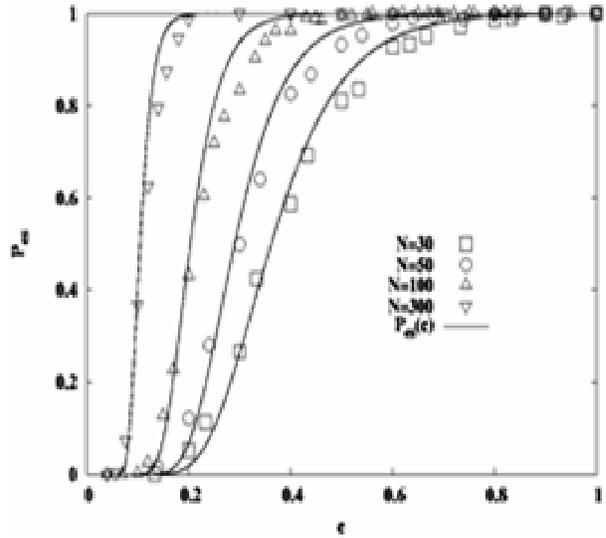
calcular la probabilidad de que un hombre quede casado con una mujer que est6 m6s all6 de la posici6n  $cN$  en su lista de preferencias como:

$$F(c) = \sum_{q=cN+1}^N P_H(q) = -\left(1 - \frac{r}{N}\right)^N + \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{cN} \quad (4)$$

En virtud de T4 el problema  $G(c)$  tendr6 al menos un estado estable si todos los hombres quedan casados con una de sus primeras  $cN$  opciones en el estado  $\Pi^{GS}$  de  $G'$ . Esto tendr6 una probabilidad:

$$\begin{aligned} P_{es}(c) &= (1 - F(c))^N \\ &= \left(1 + \left(1 - \frac{r}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{cN}\right)^N \quad (5) \\ &\cong (1 + e^{-r} - e^{-cr})^N \end{aligned}$$

Esta es la relaci6n que est6bamos buscando y aparece graficada en Figura 1 junto con el resultado num6rico de las simulaciones hechas para sistemas de distintos tamaños.



**Figura 1.** Se muestra el resultado analítico obtenido en la ecuaci6n (5) junto con los resultados num6ricos promediados sobre 103 instancias del problema de los matrimonios

El ajuste es bastante bueno, especialmente en lo que refiere al cambio de comportamiento entre los sistemas con estados estables y aquellos que no lo tienen. Una forma de estimar la conectividad crítica  $C_c$  que define el cambio de comportamiento de los sistemas es a trav6s de la relaci6n  $P(c_c) = 0.5$ . Haciendo algunas aproximaciones v6lidas para valores grandes de  $N$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
0.5 &= P(c_c) \\
&\cong (1 - e^{-cr})^N \cong e^{-Ne^{-cr}} \quad (6) \\
c_c &= \frac{\log^2 N}{N}
\end{aligned}$$

Un resultado semejante obtuvieron Dzierzawa y Omero<sup>11</sup> considerando en vez de información incompleta el caso en que tanto hombres como mujeres tienen una aceptación umbral para sus parejas. Esto quiere decir que aunque se tenga opinión de todas las posibles parejas, es preferible quedar soltero a compartir una relación con una persona que está más allá de la posición  $\Delta N$  en nuestra lista, donde  $\Delta$  es el umbral de aceptación y juega el papel de la conectividad. El resultado de Dzierzawa y Omero es que si los hombres y mujeres ajustan su umbral al valor crítico, no importa qué sexo tome la iniciativa, se llega a un estado estable que es simétrico en energía para hombres y mujeres. El hecho de que este estado se obtenga justo para el valor crítico de la conectividad tiene también la implicación de que se hace menos probable encontrar un estado estable en el que todos tengan pareja.

## Conclusiones

En el estudio del problema de los matrimonios con información incompleta hemos demostrado la equivalencia entre este problema y uno derivado con información completa. Los teoremas presentados, y en especial el **T1**, **T2** y **T5** pueden ser de utilidad en trabajos posteriores sobre este modelo.

Basados en **T4** y **T5** y usando resultados conocidos del problema de los matrimonios con información completa, obtuvimos una expresión para la probabilidad  $P_{es}(c)$  de que existan estados estables en que todos los elementos estén casados. La forma de la función  $P_{es}(c)$  y el valor de  $c_c$  obtenido permiten clasificar a las instancias  $G(c)$  del problema de los matrimonios con información limitada en dos grupos según  $c < c_c$  ó  $c > c_c$ . En el primero de los casos, es imposible lograr

una asignación estable de parejas a todos los jugadores.

Tomando literalmente el problema de los matrimonios como modelo de las relaciones de pareja en la sociedad, y olvidando por un momento las sobresimplificaciones del modelo, en una población de 12 Millones de personas, donde 6M son de un sexo y 6M del otro, y alrededor de 1/6 de cada sexo (1M) tienen una edad que no dista más de 5 años de la nuestra, habría que conocer un promedio de  $c_c N = \log^2 N = \log^2 1M = 190$  personas del sexo opuesto o más para garantizar una asignación estable de parejas a cada persona.

## Referencias

1. Y.C. Zhang, Modeling Market Mechanism with Evolutionary Games, *Europhys. News* 29, 51 (1998).
2. D. Challet and Y.-C. Zhang, Emergence of Cooperation and Organization in an Evolutionary Game, *Physica A* 246 :407-418 (1997).
3. Barbara Drossel, Biological Evolution and Statistical Physics, *Advances in Physics*, 50 (2001).
4. Yi-Cheng Zhang, Happier World with More Information, *Physica A* 299 (1-2) pp. 104-120, (2001).
5. Paolo Laureti and Yi-Cheng Zhang, Matching games with partial information, *Physica A*, Volume 324, Issue 1-2, p. 49-65 (2003).
6. Alejandro Lage-Castellanos and Roberto Mulet, *Physica A*, 364: 389-402 (2006).
7. Stephan Mertens, Random Stable Matchings, *J. Stat. Mech.* P10008 (2005).
8. M. Mezard and G. Parisi, *J. Physique Lett.* 46, L-771 (1985)
9. Th. M. Nieuwenhizen, The marriage problem and the fate of bachelors, *Physica A* 252: 178-198 (1998).
10. M.-J. Omero, M. Dzierzawa, M. Marsili and Y.-C. Zhang, *J Physique I France* 7: 1723-1732 (1997).
11. M. Dzierzawa and M.J. Omero, *Physica A*, 287: 321-33 (2000).
12. Robert Gibbons, *A primer in game theory*, (Ed. By Harvester Wheatsheaf, London, 1992).
13. D. Gale and L. S. Shapley, *Am. Math. Monthly* 69, 9 (1962).
14. D. Gusfield and R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, The MIT Press (Cambridge, Massachusetts; London, UK; 1989).

## Difusión de epicentros: modelo de red dinámica

R. Gámez, A. Posadas<sup>a</sup>, F. Luzón<sup>a</sup>, O. Sotolongo-Costa<sup>b</sup>.

Instituto de Geofísica y Astronomía CITMA, Cuba, gamez@iga.cu

a) Departamento de Física Aplicada, Universidad de Almería, España.

b) Cátedra de Sistemas Complejos “Henri Poincaré”, Universidad de la Habana, Cuba, osotolongo@fisica.uh.cu

Recibido el 3/06/2006. Aprobado en versión final el 1/12/2006

**Sumario.** Se determinó el comportamiento difusivo de las réplicas de terremotos para los eventos de este tipo ocurridos en Cuba de 1964 a 2000. El resultado muestra que tiene lugar un proceso de centralización de los epicentros desde puntos más lejanos hacia el punto de ocurrencia del terremoto principal. El proceso es de difusión anómala en régimen sub-difusivo con exponente  $\alpha = 0.24$ . Se muestra una correspondencia entre la distribución de probabilidades de localizar los epicentros a cierta distancia del terremoto principal de la celda con los resultados teóricos de la solución de la Ecuación Fraccionaria de Fokker-Planck (EFFP).

**Abstract.** The diffusive behavior of replica secondary earthquakes taking place in Cuba from 1964 to 2000 was determined. Results show that takes place a process of epicenter centralization from the farther points towards the main earthquake impact point. The process is that of an anomalous diffusion in a sub-diffusive regime with exponential constant  $\alpha = 0.24$ . It is shown a connection between the probability distribution for localizing the epicenters at a given distance of the main earthquake in the cell with the theoretical results of the Fokker-Planck (EFFP) fractionary equation solution.

**Palabras claves:** Terremotos \*91.30.P-, 91.30.Px, modelado 07.05.Tp

### 1 Introducción

Resulta ocioso resaltar aún más la importancia del conocimiento de la naturaleza y comportamiento de los terremotos. Desde hace muchos años se ha estado intentando conocer mejor cómo se originan los mismos y cuáles son los lugares más “visitados” por estos eventos.

El terremoto es un evento catastrófico de sacudida y rotura de la superficie terrestre en una gran extensión. A menudo la mayor parte de la energía del mismo se concentra en una región relativamente pequeña, del orden de 1-2 km. Esta es conocida como “epicentro” y en la misma ocurren grandes sacudidas y destrucción del entorno, frecuentemente acompañado de otros eventos provocados por este: grandes olas si ocurren bajo el mar, posibles erupciones volcánicas acompañantes, deslizamientos

de grandes estructuras del terreno, etc.

La ocurrencia de un terremoto en cualquier lugar del planeta es detectable hoy en día con los modernos sistemas de medición, siendo posible conocer con gran precisión el lugar de ocurrencia y su magnitud.

Mucho queda por conocer de los mismos: aún no está completamente esclarecido el mecanismo de desencadenamiento de su energía, es por ahora imposible hacer predicciones confiables sobre su ocurrencia en un momento y lugar dados, y el proceso de liberación de la energía sísmica así como los eventos subsiguientes generados por un terremoto, son poco conocidos.

No obstante, es una opinión bastante aceptada en la bibliografía sobre sismos que lo más frecuente es que: a la ocurrencia de un terremoto le precedan temblores de menor magnitud (precursores), y después de ocurrido el

mismo, se desencadena una sucesión de temblores, también de menor magnitud conocidos como “réplicas”. Los precursoros y las réplicas son terremotos de menor escala en energía pero con todas las características del mismo, incluida la presencia de su epicentro correspondiente.

En los últimos años se han realizado numerosos estudios sobre el comportamiento difusivo de los epicentros de los terremotos (Ejemplos, ref. [1,2,3]). En estos trabajos se ha propuesto la descripción de la difusión de epicentros mediante un caminante aleatorio de tiempo continuo (CTRW: Continuous Time Random Walk). En este modelo, las diferentes posiciones de los epicentros son considerados como los pasos que efectúa dicho caminante aleatorio, enfoque que facilita notablemente el estudio del comportamiento difusivo.

Si analizamos todos los epicentros que tienen lugar en una región sísmica sin distinguir entre evento principal y réplicas, o sea considerando todos los terremotos por igual y en un intervalo de tiempo determinado, no podremos observar un comportamiento difusivo claramente definido. La existencia de zonas de mayor actividad dentro de las regiones sísmicas implica que los epicentros no se distribuyan de forma totalmente aleatoria en dichas regiones. Es decir, existirán zonas que el epicentro “visitará” con mayor frecuencia lo cual impone restricciones en su movimiento.

Sin embargo, si se realiza una clasificación de los eventos en celdas terremoto-réplicas (CTR), determinadas por la región espacial en que se manifiesta el evento principal y sus réplicas, entonces será posible analizar la difusión de los epicentros en dichas estructuras. Como ya dijimos, cada celda se considera formada por un terremoto que llamamos principal y por el conjunto de réplicas que se le asocian. El método de clasificación más conocido es el de ventanas espacio-tiempo<sup>4</sup>. No obstante, dicho método presenta limitantes, la identificación de las réplicas de un determinado terremoto tiene en cuenta el criterio del observador y además, las réplicas deben ser distinguidas del llamado fondo de sismicidad.

En este trabajo la determinación de las CTR se realizó utilizando el método de correlación de eventos mostrado recientemente por Marco Baiesi y Maya Paczusi<sup>5-7</sup>, y que explicaremos posteriormente. Este brinda como resultado una red de eventos enlazados que evoluciona en el tiempo de forma jerárquica. Los eventos que generan réplicas pueden a su vez haber sido generados por eventos anteriores. Como puede verse, enlazando entre sí estos eventos se obtiene una red cuyas características veremos más adelante.

La red obtenida por el método de Baiesi-Paczusi (BP) presenta un conjunto de propiedades que pueden ser analizadas utilizando los formalismos actuales del estudio de redes. Como demostraremos, a semejanza de la red de enlaces de Internet<sup>8,9</sup>, y otras, la red de epicentros presenta una estructura libre de escala. El objetivo fundamental del trabajo está dirigido a determinar el comportamiento difusivo en CTR. Se estableció además una correspondencia entre la distribución de probabilidad de

encontrar un caminante a diferentes distancias del terremoto principal con los resultados teóricos de varios estudios de difusión anómala.

## 2 Difusión anómala

Los Caminantes Aleatorios sirven como modelos para los procesos de difusión normal. La difusión normal de una partícula moviéndose en una dimensión puede describirse por medio de la ecuación lineal de Fokker-Planck<sup>10</sup>.

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = K \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{F(x)}{k_B T} \right] P(x,t) \quad (1)$$

También llamada ecuación de Smoluchowski y que describe varios tipos de difusión Markoviana normal. En ausencia de fuerzas externas  $F(x)=0$ , la ecuación se reduce al caso de una evolución gaussiana del sistema. La ecuación (1) se obtiene asumiendo la existencia de una escala de tiempo microscópica que es mucho menor que el tiempo de observación. Este es el tiempo característico que le toma a la partícula realizar un salto de una posición a otra.

En las últimas décadas la descripción de los procesos que presentan difusión anómala se ha llevado a cabo por el método CTRW<sup>1,2,3,10-16</sup> propuesto por Montroll y Weiss en 1965. Los CTRW se caracterizan por dos parámetros: un tiempo de espera característico entre saltos y una distancia de saltos<sup>14</sup>. Si la escala de tiempo característico diverge estamos en presencia de un proceso de difusión anómala<sup>10-17</sup>. En los procesos que presentan difusión anómala la varianza del desplazamiento de la partícula después de un tiempo  $t$ , tiene la forma asintótica:

$$\langle r^2 \rangle \propto t^\alpha, \quad t \rightarrow \infty, \alpha \neq 1 \quad (2)$$

Si  $0 < \alpha < 1$  el proceso se denomina subdifusivo, en cambio si  $\alpha > 1$  se denomina superdifusivo<sup>1,2,10-17</sup>. La difusión normal tiene lugar para  $\alpha \approx 1$ .

Los sistemas que presentan difusión anómala se caracterizan por un tiempo de espera divergente o por una fuerte naturaleza no-Markoviana<sup>11,13,15,16</sup>. Esto significa que la evolución del sistema en el tiempo  $t$  depende de su pasado y que el rango de esta “memoria” es grande comparada con la escala de tiempo característica del movimiento. El formalismo actual que permite abordar el fenómeno de la difusión anómala tomando en cuenta los efectos de memoria cuando no existe una escala de tiempo característica es el *Cálculo Fraccionario*.

El cálculo fraccionario es una extensión de los operadores del cálculo diferencial e integral más allá de las definiciones tradicionales. Una analogía puede encontrarse en el cálculo algebraico cuando se realiza la generalización de los exponentes de una variable de valores enteros a valores fraccionarios. En muchos trabajos se cita el surgimiento del Cálculo Fraccionario en el año 1695, cuando L'Hôpital le escribió a Leibnitz preguntándole sobre una notación que él había utilizado en una de sus

publicaciones. Leibnitz había planteado la derivada n-ésima de la función lineal  $f(x)=x$ . La pregunta de L'Hôpital se refería al resultado del cálculo de dicha derivada en el caso de que  $n = \frac{1}{2}$ . Leibnitz le respondió: "Una paradoja aparente, de lo cual algún día se obtendrán consecuencias útiles"<sup>12,18</sup>. En la actualidad se conocen numerosas aplicaciones y manifestaciones físicas del cálculo fraccionario que confirman la suposición de Leibnitz sobre la utilidad del mismo.

Entre los principales contribuyentes al cálculo fraccionario se encuentran: Fourier, Euler, Laplace, Riemann y Liouville. Varios de ellos expusieron definiciones de derivadas e integrales de orden no entero. La definición más utilizada es la propuesta por Riemann-Liouville y se deriva de la expresión atribuida a Cauchy para evaluar la integración n-ésima de una función  $f(t)$ .

$$\int \dots \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (3)$$

En la ecuación (3) la presencia del factorial restringe a  $n$  a tomar solo valores enteros. Sin embargo la función Gamma es una expansión analítica del factorial a valores reales. Sustituyendo entonces el factorial por la función Gamma y haciendo uso de la notación  ${}_a D_t^{-\alpha} f(t)$  para representar la integración en un orden, obtenemos la integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (4)$$

La derivada fraccionaria puede ser introducida a su vez por un método semejante. Un orden arbitrario de diferenciación para funciones que puedan ser expandidas en serie de Taylor es:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha} \quad (5)$$

Sin embargo, una forma más general y elegante de calcular la derivada fraccionaria es haciendo uso de la integral de Riemann-Liouville. Seleccionemos un entero  $m$  tal que  $m-1 < \alpha < m$ . A partir del mismo se pueden formular dos definiciones conocidas como "derivada a la izquierda" y "derivada a la derecha".

La derivada a la izquierda realiza primero la integral fraccionaria de la función en un orden  $m-\alpha$  y el segundo paso es derivar el resultado en un orden  $m$ .

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(\tau), & \alpha = m \end{cases} \quad (6)$$

La derivada a la derecha arriba al mismo resultado haciendo uso de las mismas operaciones pero en orden inverso.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(\tau), & \alpha = m \end{cases} \quad (7)$$

Esta definición fue originalmente formulada por Caputo y es comúnmente conocida como la Derivada Fraccionaria de Caputo.

*Ecuación Fraccionaria de Fokker-Planck.* Los efectos de memoria se encuentran incluidos en la definición de la derivada fraccionaria pues la misma se expresa a través de una integración en el intervalo de tiempo del proceso (ver (6) y (7)). Por lo tanto, para tomar en cuenta los efectos de memoria responsables del comportamiento anómalo en el caso subdifusivo, se ha propuesto reemplazar la derivada temporal local de la ecuación de difusión por un operador fraccionario<sup>11,12,13,15,16,17</sup>. De esta forma la difusión en presencia de un campo externo se expresa mediante la ecuación fraccionaria de Fokker-Planck (EFFP):

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = {}_0 D_t^{1-\alpha} K_\alpha \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} k_B T \right] P(x,t) \quad (8)$$

Donde:

$${}_0 D_t^{1-\alpha} Z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \frac{Z(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$$

El operador fraccionario de Riemann-Liouville  ${}_0 D_t^{1-\alpha}$  se obtiene de sustituir  $\alpha$  por  $1-\alpha$  en la ecuación (6) y de considerar  $m=1$  ( $0 < \alpha < 1$ ) en la misma. En el caso de la partícula libre la ecuación (8) se reduce a la forma:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = {}_0 D_t^{1-\alpha} \left[ K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) \right] \quad (9)$$

Esta ecuación fue resuelta por Schneider y Wyss en términos de la función de Fox<sup>11,15</sup>. Sin embargo, el problema puede ser resuelto de una manera más sencilla en el espacio  $p$  de Laplace y retornar nuevamente a la variable  $t$ <sup>11,15</sup>. Haciendo uso de que la derivada fraccionaria satisface la regla de transformación  ${}_0 D_t^{1-\alpha} g(t) \mapsto p^{1-\alpha} \bar{g}(p)$ <sup>11,12,15,19</sup>, tendremos en el espacio de Laplace:

$$-\delta(x) + p \hat{P}(x,p) = K_\alpha p^{1-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{P}(x,p) \quad (10)$$

donde  $\delta(x)$  es la función delta de Dirac y  $\hat{P}(x,p)$  se anula si  $|x| \rightarrow \infty$ . Esta ecuación se resuelve por métodos estándares brindando la solución:

$$\hat{P}(x,p) = \frac{1}{K_\alpha^{1/2} p^{1-\alpha/2}} e^{\left( \frac{\alpha/2}{K_\alpha} |x| \right)} \quad (11)$$

Cuya transformada inversa tomando  $K_\alpha = 1$  es<sup>10</sup>:

$$P(x,t) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{t}{|x|^{1+2/\alpha}} \right) L_{\alpha/2} \left( \frac{t}{|x|^{2/\alpha}} \right) \quad (12)$$

$L_{\alpha/2}(z)$  es una distribución de Lévy definida solo para  $z > 0$  y cuya función característica es:

$$L_{\alpha/2}(u) = \int_0^\infty e^{-uz} L_{\alpha/2}(z) dz = e^{\left(-u^{\alpha/2}\right)} \quad (13)$$

Utilizando en (12) la representación en serie de las distribuciones de Lévy<sup>20</sup> y aproximando para  $\alpha$  pequeño en relación con la unidad, obtenemos que el comportamiento de  $P(x,t)$  en este caso puede aproximarse a:

$$P(x,t) \sim \frac{1}{\alpha t^{\alpha/2}} e^{\left(-c \frac{|x|}{t^{\alpha/2}}\right)} \quad (14),$$

donde  $c$  es una constante  $c = c(\alpha)$ .

La representación gráfica de esta solución se muestra en la figura 1. Note que existe diferencia con respecto al caso de difusión normal, la cual es expresada mediante una distribución gaussiana.

En la figura 1 se muestra que a medida que se incrementa el tiempo crece la probabilidad de encontrar la partícula a mayor distancia del punto inicial de donde parte el caminante aleatorio, y disminuye la probabilidad de encontrarla en las cercanías de dicho punto. La difusión gobernada por el modelo CTRW satisface la ecuación de distribución fraccionaria y muestra una distribución de probabilidades con un pico máximo en  $x=0$ .

La ecuación (12) nos da una propiedad importante de los procesos de difusión anómala CTRW: obedecen a la estadística de Levy. Las consecuencias de este hecho para el análisis y la interpretación del comportamiento de los epicentros se verá en el epígrafe destinado a la discusión.

### 3 Materiales y métodos

Se procesaron los terremotos registrados en la región oriental de Cuba en el período comprendido entre enero de 1964 hasta diciembre del 2000<sup>4</sup>. En la Tabla I se muestran las características de la data procesada.

**Tabla I.** Características de la data utilizada.  $N_t$  es el número de terremotos.

Pe- ríodo	$N_t$	Latitud	Longitud	$m >$
1964- 2000	> 6900	18.0 -- 21.5	-72.0 -- -79.0	1.5

La red de los eventos fue generada utilizando el método BP<sup>5,6,7</sup>, este se basa en una métrica que brinda la

correlación entre diferentes terremotos. Si designamos dos eventos cualesquiera  $i$  y  $j$ , que ocurren en los tiempos  $t_i$  y  $t_j$ , con  $t_i < t_j$  y  $t = t_j - t_i$ , y siendo  $m_i$  la magnitud del evento  $i$ , y  $l = l_{ij}$  la distancia entre los epicentros, el número de eventos  $n_{ij}$  en el intervalo  $\Delta m$  de  $m_i$  que ocurren en el dominio espacio-temporal de los eventos  $i$  y  $j$ , se determina por:

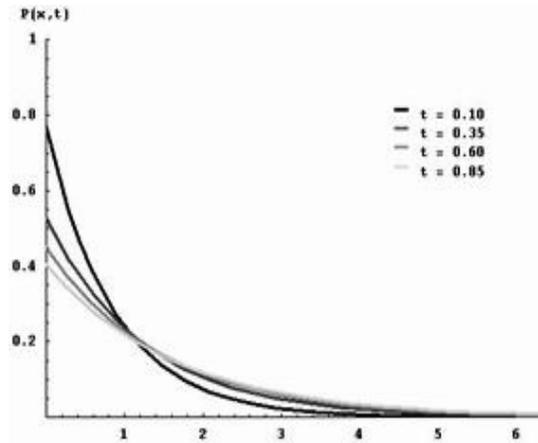
$$n_{ij} \equiv C t l^{d_f} \Delta m 10^{-b m_i} \quad (15)$$

Para cada evento  $j$  de la data se determinó el evento  $i$  de todos los anteriores para el cual  $n_{ij}$  adquiere el mínimo valor. Se consideró entonces que el evento  $j$  es réplica del evento  $i$  para el cual se cumple esa condición. Para valores muy pequeños de  $n_{ij}$  la correlación entre eventos es muy fuerte. Por tanto, el grado de correlación entre dos terremotos se define en la forma:

$$\gamma_{ij} = 1/n_{ij} \quad (16)$$

Los enlaces débiles que corresponden a eventos poco correlacionados se eliminaron definiendo un parámetro como la máxima correlación posible  $n_c$ , se consideraron débiles todos aquellos enlaces con valor  $n_{ij} > n_c$ .

La ecuación (15) determina la métrica de correlación entre eventos. En la misma  $d_f$  representa la dimensión fractal de los epicentros de los terremotos y fue determinada por el método de conteo por celdas. Por otra parte  $b$  es la constante de la ley de Gutenberg-Richter:  $P(m) \sim 10^{-b m}$  cuyo valor es por lo general  $b \sim 1$ . El valor de la constante  $C$  depende de la región sísmica y se determina por la ecuación (15)<sup>5,6</sup>.



**Figura 1.** Solución de la EFPF

### 4 Resultados

Para poder hacer uso de la ecuación (15) fue preciso determinar la dimensión fractal de la distribución de los epicentros. Haciendo uso del método de conteo por celdas se determinó un valor de  $d_f = 1.4$  para la data utilizada. Además, en dicha data la ley de Gutenberg-Richter se cumple para valores de magnitud superiores a 2 y brindó como resultado  $b = (0.94 \pm 0.16)$ .

Para determinar el valor de la constante  $C$  se seleccionaron varias áreas circulares en zonas de gran actividad sísmica y se realizó un conteo de la cantidad de eventos que tuvieron lugar en las mismas. El valor medio de  $C$  fue aproximado a  $C=10^{-8}$  ya que este influye solamente de manera relativa para la determinación del peso del enlace  $n_{ij}$ . Además, para la data utilizada  $\Delta m = 0.1$  y se consideró como la máxima correlación posible:  $n_c=10^{-5}$ . Para clasificar un evento como réplica de uno anterior, hemos impuesto que la magnitud no debe exceder la del anterior.

En la determinación de las correlaciones entre eventos las singularidades se eliminaron limitando el valor mínimo de  $t$  a 10 segundos y la mínima resolución espacial a 100 metros. Para obtener los valores de distancias, la latitud y la longitud geográfica del epicentro fueron transformadas a coordenadas planas.

Por medio de la ecuación (15) se obtuvo como resultado una red de eventos enlazados que evoluciona en el tiempo de forma jerárquica. En la misma no puede establecerse una clasificación precisa de un evento como terremoto o réplica pues un sismo puede ser simultáneamente una réplica de eventos anteriores y un terremoto creador de nuevos eventos. En la figura 2 se muestra un ejemplo de la red obtenida por el método BP.

El análisis de la distribución de los nodos para la red generada mostró que la misma cumple con una ley de potencia en la forma  $P(k) \sim k^{-\delta}$ . El valor del exponente fue  $\delta=1.9$ . Por lo tanto, según los criterios actuales del estudio de redes tenemos que los epicentros forman una red libre de escala<sup>5,6,19</sup>.

La utilización del método BP brindó un total de 25 CTR con  $N \geq 20$ , donde  $N$  es el número de eventos. En la figura 3 se muestra a modo de ilustración una comparación entre un caminante Browniano y la difusión en una CTR tomada de la red generada con el catálogo. Aquí la distancia  $x$  es medida a partir de la posición del terremoto que genera la celda, o sea desde el primer evento de la misma. Note que en comparación con el caso Browniano, el caminante de los epicentros ejecuta saltos de forma muy irregular y en ocasiones permanece estático en determinadas posiciones. En el movimiento Browniano los tiempos de espera son finitos existiendo una escala característica de tiempo y el caminante tiende a alejarse del origen. En cambio, el caminante CTR mostrado nos da la existencia de tiempos de espera largos sin mostrar una escala característica, lo cual demuestra que el "caminante" asociado en este proceso es un CTRW.

En trabajos anteriores otros autores han propuesto que los epicentros de los terremotos presentan difusión anómala, la cual puede ser descrita mediante un modelo de CTRW (Ej. [1,2,3]).

En la figura 4 se muestra el comportamiento difusivo de los epicentros en CTR. En la misma la distancia se ha determinado realizando un cambio de variable de  $x$  a  $y=l-x$ , es decir, la distancia se mide desde la frontera de la celda hacia la posición del epicentro que la genera.

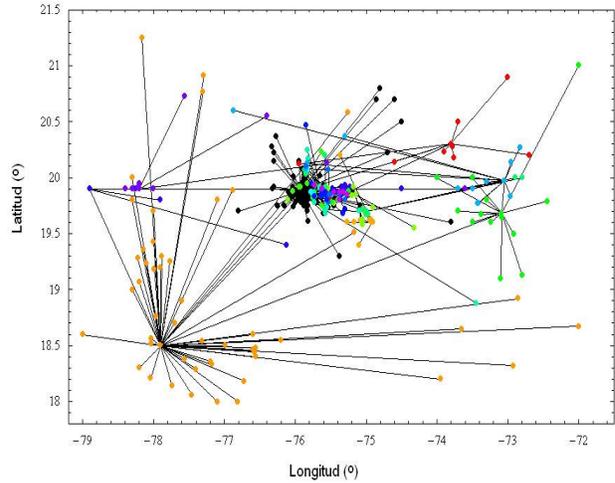


Figura 2. Red obtenida por el método BP

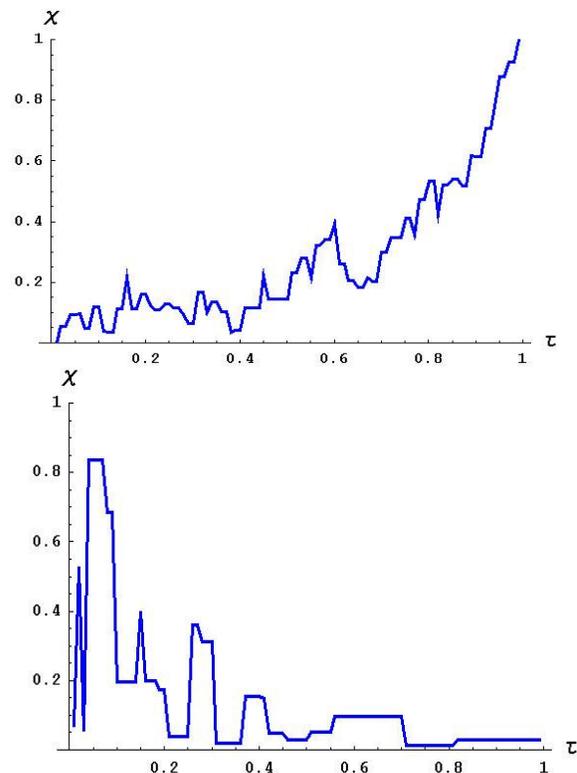


Figura 3. Comparación de un caminante Browniano (Arriba) con el CTRW del epicentro en una CTR (Debajo).

La realización de este cambio de variable se debe a que los epicentros muestran un proceso de centralización en la dirección del terremoto principal generador de la celda. La figura muestra un comportamiento subdifusivo hacia el centro de las celdas en la forma  $\langle y^2 \rangle \sim t^\alpha$ , con  $\alpha = 0.24$ .

En la figura 5 se muestra el comportamiento  $P(x,t)$  vs  $x$  para las 25 celdas procesadas. Con el incremento del tiempo aumenta la probabilidad de encontrar al caminante en una posición cercana al punto donde tuvo lugar el

terremoto principal de la celda y disminuye la probabilidad de encontrarlo en una posición alejada del mismo.

No es difícil percatarse de que la data ilustrada en la figura 5 tiene un comportamiento que puede describirse bien con la fórmula (14). El proceso de ajuste de la fórmula con la data lleva un conjunto de consideraciones que serán expuestas en un trabajo posterior

## 5 Discusión y conclusiones

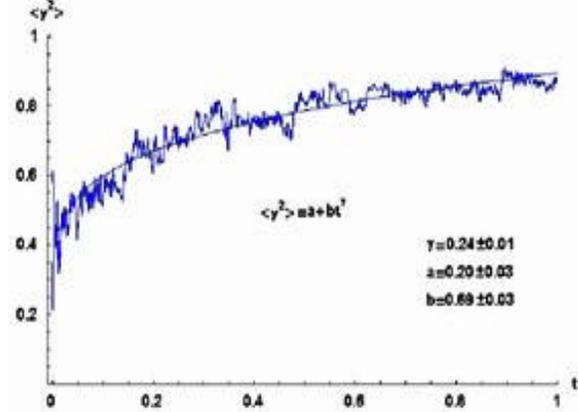
Este trabajo demuestra que la difusión de epicentros en CTR determinadas por el método BP puede ser descrita por un CTRW donde la escala de tiempo característica diverge. Esto revela una vez más la naturaleza de Lévy de estos procesos. El caminante ejecuta saltos aleatorios y en ocasiones permanece estático, por un intervalo de tiempo, en determinadas posiciones.

La ocurrencia del terremoto principal genera tensiones en zonas cercanas al mismo. El número de estas tensiones se incrementa en dirección a dicho punto. Por lo general, al inicio las réplicas de las celdas tienen lugar a cualquier distancia del terremoto principal, sin embargo, con el incremento de  $t$  la mayoría de las réplicas tienen lugar a distancias cada vez más próximas del mismo. De esta manera, el epicentro del terremoto principal actúa como un "atractor" hacia el cual se desplazan los demás. En la figura 4 se muestra que el movimiento de los epicentros de las réplicas hacia el epicentro principal de la celda se describe mediante un proceso de difusión anómala en régimen sub-difusivo con valor de  $0 < (\alpha = 0.24) < 1$ .

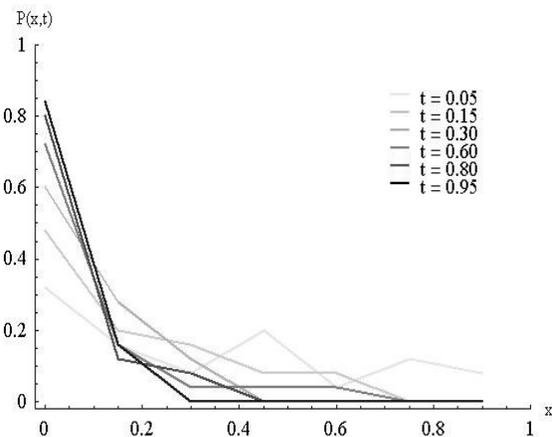
La figura 5 muestra que el proceso de difusión de los epicentros en CTR es análogo al resultado teórico de la solución de la EFP que se muestra en la figura 1. Para entender este resultado tenemos que tomar en cuenta que las características de la difusión de los epicentros en una región sísmica presentan un carácter no-Markoviano, en el cual la evolución del sistema en el tiempo depende del pasado. La ocurrencia del terremoto principal que da lugar a la celda, genera un rango de "memoria" que es grande comparada con el tiempo entre saltos. Ahora, el evento principal genera una distribución de tensiones que presenta una mayor probabilidad de ocurrencia de réplicas en las cercanías del centro de la celda. Además, el proceso de concentración de los epicentros hacia el centro de las celdas que hemos obtenido como consecuencia de la aplicación del método BP hace que el proceso sea análogo a la difusión de una partícula en régimen sub-difusivo, pero dirigido hacia un punto.

Esta analogía con el proceso de difusión anómalo revela la omnipresencia de los procesos de Lévy en los fenómenos naturales. En efecto, las distribuciones estables de Lévy tienen una base mucho más amplia que la Gaussiana la cual está relacionada sólo con la presencia de variables aleatorias distribuidas con varianza finita, mientras las distribuciones de Lévy no tienen esta limitación<sup>20</sup>. Así, la gran generalidad de que gozan las distri-

buciones estables hace posible aplicar sus propiedades a una gran variedad de fenómenos aleatorios que no se ajustan a distribuciones con varianza finita. Por ello, las leyes que se obtienen con las distribuciones estables son más generales.



**Figura 4.** Comportamiento sub-difusivo de los epicentros en 25 CTR. Las distancias se determinan a partir de la frontera de las celdas hacia la posición del terremoto principal que la genera.



**Figura 5.** Probabilidad de encontrar al caminante a una distancia  $x$  del terremoto principal, para diferentes valores de tiempo.

En términos de terremotos, la aplicación de estos métodos sugiere que es correcto pensar en, los epicentros de los mismos como "caminantes aleatorios" con tiempo de espera cuya escala característica diverge. Así, si nos representamos el origen de los procesos sísmicos a través del movimiento de placas tectónicas rugosas, el mecanismo de retención del movimiento de las placas por las rugosidades es concebible como el "salto" de un epicentro del lugar donde ocurrió antes, al nuevo lugar en que las rugosidades se vuelven a interpenetrar y donde se van acumulando la mayor cantidad de esfuerzos<sup>21</sup>.

Se ha demostrado que el método BP conduce directamente a la descripción de la migración de los epicentros en las CTR con el evento principal como centro de atracción de la difusión, cosa no lograble aparentemente con otros métodos. En general, los epicentros en CTR

generadas por el método BP, se desplazan describiendo un movimiento de centralización dirigida hacia el punto donde tuvo lugar el terremoto principal. Dicha centralización se representa mediante un proceso de difusión anómala en régimen subdifusivo. El epicentro del terremoto principal actúa como un “atractor” que ha creado una mayor concentración de tensiones en su cercanía que en zonas alejadas del mismo. Las tensiones se liberan primero a cualesquiera distancias, pero con el paso del tiempo las liberaciones de energía van teniendo lugar cada vez a distancias más próximas del epicentro principal.

Se revela además, una correspondencia entre la solución de la EFFF y la distribución de probabilidades de encontrar el caminante de los epicentros a diferentes distancias del terremoto principal y para diferentes valores de tiempo. La difusión de los epicentros en una región sísmica presenta un carácter no-Markoviano, en el cual la evolución del sistema en el tiempo depende del pasado del sistema. La ocurrencia del terremoto principal que da lugar a la celda, genera un rango de “memoria” que es grande comparada con el tiempo entre saltos.

Se comprobó además, que el catálogo de terremotos de que disponemos genera, con este método, una red libre de escala, resultado semejante al obtenido por otros autores en trabajos anteriores con otros catálogos.

## Agradecimientos

Al Dr. Julio García Peláez del departamento de Sismología de Ciudad de la Habana (CENAI), por facilitar la data procesada y por toda su disposición en las consultas referentes a la misma.

## Referencias

1. O. Sotolongo-Costa, J.C. Antoranz, A. Posadas, F. Vidal, A. Vazquez.: Lévy Flights and Earthquakes, *Geophysical Research Letters*, Vol. 27, No. 13, pp 1965-1968, (2000).
2. A. Posadas, O. Sotolongo-Costa, C. Antoranz, and A. Vazquez.: Using Lévy Flights Functions to Characterize the Hypocenters Distribution of Seismic Series in South Spain. EGS XXVI General Assembly, Nice, France, March 2001.
3. A. Helmstetter and D. Sornette, Diffusion of epicenters of earthquake aftershock, Omori law and generalized continuous-time random walk models, *Phys. Rev. E*, 66. 061104, (2002).
4. L. Álvarez, T Chuy, J. Garcia, B. Moreno, H. Álvarez, M. Blanco, O. Expósito, O. González and A. Fernandez, I., An

earthquake catalogue of Cuba and neighboring areas, ICTP Internal Report IC/IR/99/1, Miramare, Trieste, 66 pp (1999).

5. M. Baiesi, M. Paczuski, Scale Free Networks of Earthquakes and Aftershocks, *Phys. Rev. E* 69, 066106 (2004).

6. M. Baiesi, M. Paczuski, Complex Networks of earthquakes and aftershocks, *Nonlinear Processes in Geophysics*, pp. 1-11, (2005)

7. M. Paczuski.: Networks as renormalized models for emergent behaviour in physical systems, web publication <http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0502028>. In *Complexity, Metastability and Nonextensivity* (World Scientific, London, (2005).

8. S.H. Yook, H. Jeong, A.L. Barabási, Modelling the Internet's Large-Scale Topology (2001), *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 99, 13382-13386 (2002).

9. M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos: On Power-Law Relationship of the Internet Topology, *ACM SIG-COMM* (1999), *Comput Commun Rev*, 29, pp 251.

10. E. Barkai, R. Metzler and J. Klafter, From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck equation, *Physical Review E*, Vol 61, Number 1, (2000).

11. I. M. Sokolov, J. Klafter y A. Blumen, Fractional Kinetics, *Physics Today*, Nov. 2002.

12. M. Ciesielski y J. Leszczynski, Numerical Simulations of Anomalous Diffusion, *Computer Methods in Mechanics*, CMM 2003, Gliwice, Poland.

13. I. M. Sokolov, J. Klafter y A. Blumen, Does strange kinetics imply unusual thermodynamics? <http://arxiv.org> (2002).

14. R. Kupferman, Fractional Kinetics in Kac-Zwanzig Heat Bath Models, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 114, Nos. ½, (2004).

15. E. Lutz, Fractional Langevin equation, <http://arxiv.org> arXiv:cond-mat/0103128 v1 (2006).

16. R. Metzler, E. Barkai and J. Klafter.: Anomalous Diffusion and Relaxation Close to Thermal Equilibrium: A Fractional Fokker-Planck Equation Approach, *Physical Review Letters*, Vol 82, Number 18, (1999).

17. N. Chakravarti, Beyond Brownian Motion, a Levy Flight in Magic Boots, *Resonance* (2004), pp 50-60.

18. A. Loverro, Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer, ([www.nd.edu/~msen/Teaching/UnderRes/](http://www.nd.edu/~msen/Teaching/UnderRes/)).

19. R. Albert and Albert-László Barabási, Statistical Mechanics of Complex Networks, <http://arxiv.org>, arXiv: cond-mat/0106096 v1 (2001).

20. W. Feller, *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, V. 2 Ed. Limusa (1975).

21. O. Sotolongo-Costa, A. Posadas, Fragment – Asperity interaction model for earthquakes, *Physical Review Letters*, Vol. 92, No 4, 048501-1-048501-4, Published by The American Physical Society, (2004).

# Solar activity waiting time distribution function for different spatial and temporal scales phenomena

Adolfo L. Méndez Berhondo y Ramón E. Rodríguez Taboada

Instituto de Geofísica y Astronomía, Calle 212 No. 2906 entre 29 y 31, La Coronela, La Lisa, Ciudad de La Habana, CP 11 600, ado@iga.cu

Received 2/6/2006. Approved in final version 3/12/2006

**Sumario:** En este trabajo investigamos la función de distribución del tiempo de espera de dos tipos de eventos solares, ambos caracterizados por su diferente tiempo característico: los *spikes* en ondas de radio y las expulsiones de masa coronal con emisiones sucesivas. Encontramos en ambos casos que la distribución parece seguir una ley de potencia. Este artículo resume los trabajos presentados en el evento Complejidad 2006 referidos a física solar.

**Abstract:** In this work we search for waiting time distribution function of two kind of solar transient events characterized both by its different spatial and temporal scales: solar radio spikes and coronal mass ejections with two emissions. We found that in both the distribution seems to follow a power-law. This paper summarizes the works presented in the workshop Complexity 2006 in Havana Cuba, referred to solar physics.

**Keywords:** solar activity 96.60.Q-, radiowaves 41.20.Jb, 84.40.-x, solar bursts 96.60.Rd

## 1 Introduction

There are many papers devoted to searching self-organized criticality in solar physics process (e.g. refs. [1, 2, 3]). In ref. [4] the authors interpret solar granulation on all scales and the formation and evolution of some structures in solar active regions to be the result of self-organization processes occurring in a turbulent medium. On the other hand, solar coronal magnetic field in a self-organized critical state is proposed to explain as avalanches of many small reconnection events the power-law dependence of solar flare occurrence rate founded<sup>5</sup>, analogous to avalanches in a sand pile<sup>6</sup>. A power-law distribution function of waiting times is an indicator of self-organized criticality.

In nature, there are many intermittent phenomena that exhibit power-law statistics for the distribution of quiescent times between events: earthquakes<sup>7</sup>, geomagnetic bursty events<sup>8</sup>, etc. Likewise some solar transient events exhibit power-law statistics for the waiting time distribu-

tion function between events: H $\alpha$  and X-ray flares<sup>9,10</sup>, coronal mass ejections<sup>11</sup>, etc. The waiting time is given by the time that passes between two consecutive intermittent events. The power law statistics for the waiting times in a given system implies that successive events are correlated with each other, in other words the system has memory.

In this paper we present the results for searching waiting time distribution in two different solar activity events characterized by its different spatial and temporal scales: solar radio spikes and coronal mass ejections with two emissions.

*Waiting time distribution function in solar radio spikes.* Known as a special astrophysical object and described mainly by its short duration (less than 0.1 sec) and exceptionally high brightness temperature ( $T_B \approx 10^{15}$  K), as described in many reviews (e.g. refs. [12, 13, 14]) millisecond events (spikes) lag from a generally accepted model. The very short duration of spikes leads to the interpretation of a single spike as a microflare, and

the presence of a large number of spikes during the flare led to the idea of energy release fragmentation<sup>14</sup>. Related to this, in previous paper<sup>15</sup>, the coronal heating is explained by collective energy released by the ensemble of nanoflares (flares with energy about nine orders of magnitude smaller than a typical large solar flare) continuously occurring throughout the magnetized corona.

*Spikes data.* The radio observations were done by the Trieste Astronomical Observatory –Basovizza Station- in the 2695, 1420, 610, 408, 327, and 237 MHz in both left and right hand circular polarized components with a temporal resolution of 0.01 sec. We selected the spike activity associated to the July 14, 2000 flare. Once the data was explored and intervals of interest selected, their characteristics were determined in all frequencies. We selected those spike peaks with intensity greater than 10 solar flux units (1 solar flux unit =  $10^{-22}$  Wm<sup>-2</sup>Hz<sup>-1</sup>) in a 50 millisecond temporal window. The peaks were selected independently for left, right polarized components, and “un-polarized” ones.

*Waiting time distribution function analysis results in solar radio spikes.* We found that in each interval studied, the waiting time distribution function of spikes adjusted to a power-law function of the type  $P(\tau) \propto \tau^{-\alpha}$ . This behavior is observed in both polarized component left and right hand (Fig. 1). In some cases, the “un-polarized” spikes seem to follow power-law distribution too although its power-law index seems to be quite different (Fig.1).

The power-law index ( $\alpha$ ) and the coefficient (A) were calculated for each waiting time distribution function, and we found they are related as  $A = 9.8552 e^{4.862 \alpha}$ . We have not an explanation for that behavior but it seems to be related not to the intervals of observation, but to the nature of the system.

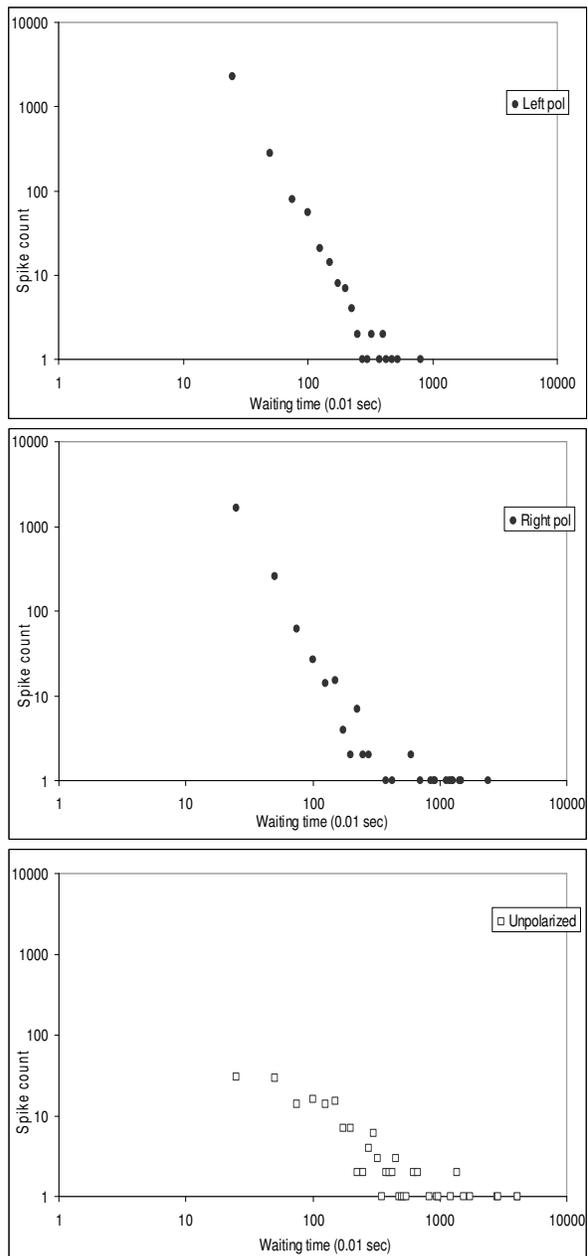
## 2 Waiting time distribution function in complex coronal mass ejections

Coronal mass ejections (CMEs) are events with a complex morphology and temporal evolution. CMEs generated in the same location and temporally close can be considered as several emissions of a unique event with several components. In this sense, ref. 16] propose a CMEs classification that involves great scales structures, where they also present several emissions cases that would be related physically. This type of emissions of coronal plasma could be related with great scale restructuring processes of the solar magnetosphere topology<sup>17</sup>.

Forecasting of solar activity impact on Earth needs to consider CMEs generated interplanetary disturbances and interactions (CME cannibalism<sup>18</sup>) and the CMEs with several emissions should be studied as key elements to understand these processes.

In our approach, we consider the possible evolution of solar magnetic structures to a stable state by several emissions ejection process. Few authors had examined

flare or CME waiting time distribution in individual active regions. To analyze the behavior of the relaxation times on solar magnetic structures associated to CMEs, we studied the waiting time between emissions of complex CMEs. We define the waiting time ( $\tau$ ) as the time interval between the commencement of an emission and the commencement of the next emission considered as parts of a unique CME.



**Figure 1.** Waiting time distribution function in the 10:20-10:30 UT interval for left hand (a) and right hand (b) polarized, and unpolarized (c) spikes events in 237 MHz.

*Coronal mass ejections data.* The study is based on the CMEs observed by the Solar Maximum Mission in 1980 and in the period between 1984 and 1989 taken

from ref. [19]. Following the criteria in ref. [20] the 113 cases considered as CMEs with two emissions were selected. To avoid the calculations of the location from which the CMEs were originated, but keeping the idea of one unique source or multiple sources of related emissions in CMEs, we classified them as “close” and “separate” paying attention to the angular distance between the CME central angle reported in ref. [19]. If the central angles differ in more than 20 degrees the pair of emissions was classified as “separate”, if less or equal 20 degrees the pair of emissions was classified as “close”.

*Waiting time distribution function analysis results in complex coronal mass ejections.* In our approach, the Sun is not considered a system as a whole generating this type of events. When we consider successive emissions from the same source we are taking into account the evolution of the magnetic structures intrinsic physical condition.

The waiting time distribution function of the 113 CMEs with two emissions divided in “close” and “separate” pairs were analyzed. For the whole data (all 113 cases) the waiting time distribution function adjust to a power-law of the type  $P(\tau) \propto \tau^{-\beta}$  with  $\beta = 1.41 \pm 0.148$  (Fig.2). For events classified as “close” and “separate” a power-law was found with indexes  $1.677 \pm 0.334$  and  $1.116 \pm 0.198$  respectively.

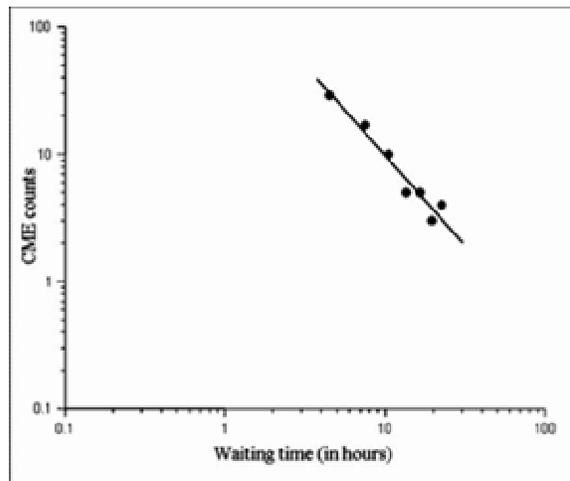
### 3 Discussions and Conclusions

The waiting time distribution function for two solar events with different scales was examined. These events –spikes and coronal mass ejections- are characterized by its quiet different spatial and temporal scales. In both cases the waiting time distribution function adjusts to a power-law function. It could be considered an indicator of self-organized criticality behavior in both event types.

In case of solar radio spikes, the waiting time distribution function would be related with the spike generation mechanism and with the process of energy release fragmentation. Both unclear aspects of spike activity. Related to the possibility of a self-organized criticality spikes behaviour, there are many details to be taken into account to be sure about such a behaviour, but a relatively simple way to explore this possibility is to analyze the waiting time distribution function between successive individual spikes. We consider waiting time an index related to the intrinsic behaviour of the system to self-organized criticality: the storage and dissipation of energy.

In case of emissions in complex coronal mass ejections, the waiting time of the CMEs with several emissions is a basic parameter in the analysis of the reorganization of the associated magnetic structure in the process of the ejections. We interpret the difference observed in the values of the indexes of the waiting time distribution of the “close” and “separate” CME related with the magnetic topology of the structures involved in the proc-

ess of the ejections. The waiting time distribution comparison between “close” and “separate” ejections shows their indexes are different. We expect greater waiting times for “separate” ones. Considering the waiting time  $\tau$  is related with  $\Lambda$  (characteristic spatial length of the CME associated magnetic structure) as  $\tau \propto (\Lambda / V_a)$ , where  $V_a$  is the Alfvén velocity, our results are in agreement with the interpretation of two different scenarios in which the CMEs with several emissions occur. CMEs with “close” and “separate” emissions are associated to scenarios with different characteristic spatial length  $\Lambda$ . CMEs with “separate” emissions have a larger  $\Lambda$  than those associated to CMEs with “close” emissions. Then, the relation between values of the power-law index for the waiting time for “separate” and “close” ( $\gamma_{\text{separate}} < \gamma_{\text{close}}$ ) are in agreement with the relation between characteristic spatial length  $\Lambda$  for “separate” and “close”. This results support the hypothesis of the existence of complex, multiple emissions CMEs.



**Figure 2.** Waiting time distribution function of the all coronal mass ejections with two emissions examined, both “close” and “separate”.

### Acknowledgments

The authors want to thank Dr. Paolo Zlobec providing us the original data used in spikes and Dr. J. T. Burkepile providing us the data used in coronal mass ejections.

### References

1. P. Charbonneau, S. W. McIntosh, H.L. Liu, and T. J. Bogdan, *Solar Phys.* **203**, 321 (2001).
2. H.-L. Liu, P. Charbonneau, A. Pouquet, T. J. Bogdan, and S. W. McIntosh, *Phys. Rev. E* **66**, 56111 (2002).
3. D. Hughes, M. Paczuski, R. O. Dendy, P. Helander, and K. G. McClements, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 131101 (2003).
4. V. Krishan and E. I. Mogilevskij, in *Basic Plasma Processes on the Sun*, edited by E. R. Priest and V. Krishan (IAUS, 1990), **142**, pp. 125-133.

5. E. T. Lu and R. J. Hamilton, *Astrophys. J.* **380**, L89 (1991).
6. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988).
7. O. Sotolongo-Costa, J. C. Antoranz, A. Posadas, F. Vidal, and A. Vázquez, *Geophys. Res. Lett.* **27**, 1965 (2000).
8. Z. Voros, D. Jankovicova, and P. Kovacs, *Nonlin. Proc. Geophys.* **9**, 149 (2002).
9. G. Boffeta, V. Carbone, P. Giuliani, P. Veltri, and A. Vulpiani, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4662 (1999).
10. M. S. Wheatland, *Astrophys. J.* **536**, L109 (2000).
11. M. S. Wheatland, *Solar Phys.* **214**, 361 (2003).
12. A.O. Benz, P. Zlobec and M. Jaeggi, *Astron. Astrophys.*, **109**, 305 (1982).
13. A.O. Benz, *Solar Phys.*, **104**, 99 (1986).
14. G.D. Fleishman and V.F. Melnikov, *Physics-Uspokhi*, **41**, 1157 (1998).
15. E. N. Parker, *Astrophys. J.* **330**, 474 (1988).
16. K. P. Dere and R. A. Howard, in *American Astron. Society Meeting*, **194**, Session 101.1 (1999).
17. I. M. Chertok and V. V. Grechnev, *Astron. Reports*, **47**, 2, 139 (2003).
18. N. Gopalswamy, S. Yashiro, M. L. Kaiser, R. A. Howard, and J. L. Bougeret, *Astrophys. J.* **548**, L91 (2001).
19. O. C. St. Cyr and J. T. Burquepile, Technical Note, NCAR/TN-369+STR, Bo. Co., USA. (1993).
20. R. E. Rodríguez, G. Gil, A. Méndez, and R. Pérez-Enriquez, *New Astron.* **3**, 321 (1998).

## El cerebro como sistema complejo: estimación de la conectividad cerebral

Eduardo Martínez Montes, Agustín Lage Castellanos, Erick Canales Rodríguez,  
Yasser Iturria Medina, y Pedro A. Valdés Sosa

Centro de Neurociencias de Cuba, [eduardo@cneuro.edu.cu](mailto:eduardo@cneuro.edu.cu)

Recibido el 7/07/2006. Aprobado en versión final el 14/04/2007.

**Sumario.** En el siglo del cerebro, la física puede jugar un gran papel en el desarrollo de las neurociencias. Las investigaciones en el campo de la complejidad cobran relevante importancia en su aplicación al estudio de un atractivo sistema complejo: el cerebro humano. El enfoque de reconocer al cerebro como una red de muchas poblaciones neuronales que funcionan en un estado crítico, permite aplicar técnicas de estudio de sistemas complejos en el análisis de la actividad cerebral. En este trabajo se ofrece una aproximación a métodos novedosos que utilizan la modelación física y modernos algoritmos matemáticos, para profundizar en la comprensión del funcionamiento cerebral. Estos se dividen según tres niveles o escalas espacio-temporales: anatómico, funcional y mental. Un método reciente para caracterizar las conexiones anatómicas dentro del cerebro a partir de imágenes de resonancia magnética de la difusión del agua, se basa en un enfoque probabilístico de la distribución de fibras nerviosas. En este, un algoritmo de trazado de caminos permite estimar las trayectorias de los haces de fibras que conectan diferentes zonas del cerebro. En otro nivel, el uso de métodos de descomposición espacio-tiempo-frecuencia y de modelos multivariados autoregresivos permite caracterizar las redes funcionales dentro del cerebro. La aplicación de estos a datos experimentales correspondientes a una actividad mental cognitiva, ofrecen nuevos elementos en la comprensión de las vías de integración de la información entre diferentes zonas del cerebro.

**Abstract.** In the so-called “Century of the brain”, physics can play an important role in the development of neurosciences. Current research in the field of Complexity could gather a relevant meaning when applied to the study of one of the most attractive natural complex systems: the brain. Realizing that the brain can be understood as a network of many neuronal populations functioning in a critical state, will allow the use of techniques for studying complex systems in the analysis of the brain activity. In this work, we briefly describe novel methods based on the use of physical modeling and modern mathematical algorithms, for the better understanding of cerebral functioning from a “complexity” point of view. These methods apply in three different spatiotemporal scales: anatomical, functional and mental scales. A recent method for characterizing anatomical connections from magnetic resonance imaging of the diffusion of water inside the brain is based in a probabilistic approach on the spatial distribution of the nervous fibers. A fiber-tracking algorithm allows the estimation of trajectories of fiber bunches connecting different anatomical zones. On the other scale, space-time-frequency methods and multivariate autoregressive models can be used for characterizing the functional networks in the brain. Application to experimental data corresponding to a superior highly organized mental activity can shed light on the understanding of the mechanisms which underlie the integration of information between different cerebral areas.

**Palabras clave.** Modelado 07.05.Tp, magnetic resonance 87.61.-c.

### 1 Introducción

En conmemoración de los 100 años de la publicación de los trabajos de Einstein sobre la Teoría Especial de la Relatividad, el año 2005 fue nombrado año mundial de

la Física. Esto ocurre en una época en que algunos hablan de una crisis en la física, dado el avance impresionante de las investigaciones en el campo de la ingeniería genética y la biología molecular en la última década.

da, la cual ha acaparado los grandes acontecimientos científicos como el genoma humano y la clonación. Por otro lado, el siglo XXI se ha dado en llamar el Siglo del Cerebro, debido al amplio potencial de avance de las investigaciones en el campo de las neurociencias sistémicas, cognitivas o clínicas, y en este, las investigaciones en física están llamadas a jugar un importante papel.

En los últimos años, ha ganado gran interés entre los físicos una supuesta nueva rama de la física llamada “complejidad”. El hecho de que los problemas abordados bajo este nombre se planteen de forma opuesta a la tradicional metodología reduccionista de la física, ha hecho que muchos se pregunten si es válido su estudio desde esa perspectiva. Sin embargo, los trabajos sobre simetría rota y emergencia de propiedades, con cimientos en resultados importantes de la teoría de la superconductividad, de la unificación de partículas y fuerzas, de la percolación y de los modelos de vidrios de espín; así como el desarrollo de la teoría del caos y su vinculación con la auto-organización y las leyes de escala; han llevado al reconocimiento de la complejidad como parte fundamental del estudio de la física en nuestros días<sup>1</sup>.

En la búsqueda de sistemas cada vez más complejos se encuentran aquellos hasta ahora considerados propios (y hasta exclusivos) de otras ciencias como la geología, la biología, ciencias de la computación, inteligencia artificial, e incluso economía y sociología. Los sistemas complejos se caracterizan por tener un número elevado de componentes interactuantes, donde tanto la aleatoriedad como el determinismo son relevantes para el comportamiento general del mismo y donde generalmente aparecen propiedades “emergentes”, que no resultan de la existencia de un control central e imposibles de predecir a partir del conocimiento de las leyes básicas que rigen las partes integrantes. En este sentido la ciencia de la complejidad se encarga de revelar los principios que gobiernan la aparición de estas nuevas propiedades. El papel que juega la escala de estudio es primordial, pues en cada nivel pueden aparecer nuevas propiedades y leyes que las rigen, haciendo inútil el uso de enfoques reduccionistas en los que sólo las reglas básicas de los componentes fundamentales son de interés<sup>2</sup>. Cada vez aparecen más ejemplos de sistemas complejos en la naturaleza que van desde las colonias de hormigas, e innumerables sistemas biológicos a distintos niveles, hasta las redes conformadas por vínculos en páginas de Internet, contactos sexuales, citación entre artículos científicos y el comportamiento de índices del mercado de valores, entre muchos otros.

## 2 La complejidad en neurociencias

El cerebro humano es considerado uno de los sistemas complejos por excelencia. Como cualquier otra célula, la neurona en sí misma constituye un sistema auto-organizado. En un nivel espacio-temporal superior, el potencial y el campo eléctrico generados por la actividad eléctrica de varias neuronas interconectadas, presenta

una dinámica compleja con características no lineales y que incluso algunas investigaciones proclaman como caótica<sup>3,4</sup>. A nivel cerebral, aparecen los estados sensoriales y cognitivos, y de consciencia en general, que son mucho más difíciles de explicar en base a la actividad básica neuronal.

Los estudios sobre el cerebro han sido realizados por múltiples disciplinas, cada una de ellas desde un punto de vista diferente. Desde la neurofisiología, la neuropsiquiatría, y las neurociencias en general, hasta la neurociencia computacional y la más joven neuroinformática. Desde hace unos años muchos físicos e ingenieros se han interesado por los estudios relacionados con la modelación del cerebro, donde se incluyen técnicas provenientes de la dinámica no lineal y la teoría del caos, el análisis de series temporales no lineales, las redes complejas, así como la modelación electrónica de las neuronas.

Actualmente, el estudio del cerebro se ha beneficiado de los avances tecnológicos alcanzados por las técnicas de neuroimágenes, particularmente aquellas relacionadas con la resonancia magnética (IRM) y las mediciones de la actividad eléctrica cerebral conocida como electroencefalograma (EEG). Las primeras son capaces de producir imágenes tomográficas (dentro del cerebro) de alta resolución espacial de las características anatómicas de los tejidos. Una modalidad de estas permite la medición del tensor de difusión del agua y otra refleja propiedades funcionales mediante la medición de la señal dependiente del nivel de oxígeno en la sangre (BOLD, del inglés *Blood oxygenation level dependent*). Sin embargo, la resolución temporal de esta última es baja, debido principalmente a que la propia hemodinámica en el cerebro responde lentamente<sup>5</sup>. En cambio, el EEG es una técnica capaz de medir en milisegundos el potencial eléctrico en unos pocos electrodos situados en el cuero cabelludo, reflejando mucho mejor la dinámica de los procesos eléctricos originados en el cerebro, pero sin ofrecer una localización espacial exacta de las masas neuronales que originan esta actividad.

La inmensa mayoría de la comunicación dentro del cerebro se realiza por conexiones físicas entre las neuronas que pueden vincular zonas lejanas (del orden de los cm) entre sí. En la corteza cerebral se estima existen cerca de  $10^{10}$  neuronas y unas  $10^{13}$  conexiones. Sin embargo las redes corticales son bastante esparcidas o “sparse” con una razón entre el número de conexiones presentes y todas las posibles de solo  $10^6$ . Las redes cerebrales no son aleatorias sino que forman patrones específicos, predominando conexiones entre grupos locales. Esto subyace una de las características específicas del cerebro: la coexistencia de especialización e integración. Redes locales se especializan en el procesamiento de determinada información (por ejemplo, el color, la forma) y la interacción entre ellas conlleva a una integración de la información (percepción del objeto como un todo).

Algunos estudios han utilizado las neuroimágenes funcionales, en el contexto de la comprensión de las redes complejas, para el estudio de la dinámica cerebral

emergente. Con técnicas simples basadas en el cálculo de la correlación temporal entre la actividad en diferentes voxels en el cerebro, se pueden encontrar propiedades de las redes cerebrales como la longitud del camino, el índice de aglomeramiento (*clustering*), el grado de conectividad y el exponente de la distribución de la conectividad. Un buen ejemplo de estos estudios (que además contiene la bibliografía actualizada) puede encontrarse en la ref. [6]. Estas investigaciones han demostrado que estas redes son “libres de escala” y también presentan pequeñas longitudes de camino, altos valores de clustering y conexiones de largo alcance, o sea, muestran una estructura de “mundo pequeño”<sup>6</sup>.

Con este trabajo queremos facilitar una aproximación del lector a las posibilidades de la modelación física y de las técnicas de análisis de datos para el acercamiento al cerebro como sistema complejo. Este acercamiento puede realizarse en tres niveles o escalas espacio-temporales diferentes: anatómico, funcional y mental; que permiten obtener una comprensión parcial pero necesaria de la complejidad del funcionamiento cerebral como un todo.

Dada la estrecha relación entre conectividad neural y la actividad cerebral es importante en un primer nivel estudiar el patrón de conexiones estructurales presentes en el cerebro, lo que llamamos la “conectividad anatómica”. En un segundo nivel tenemos las interacciones funcionales entre diversas zonas o grupos neuronales, que definen lo que se ha dado en llamar la conectividad funcional o efectiva. La conectividad funcional se estudia como el patrón de correlaciones temporales o desviaciones de la independencia estadística que existe entre distintas unidades neuronales<sup>7</sup>. Estas correlaciones son a menudo consecuencia de la conexión física entre estas zonas, aunque a veces pueden deberse a la existencia de una entrada de información común, como otro grupo neuronal o un estímulo externo.

Una medida que permite medir la dependencia estadística entre dos grupos neuronales, es la “información mutua”, muy usada en la teoría de la información y que se calcula a partir de la entropía de los subconjuntos o elementos de un sistema. La dependencia estadística total entre los elementos de un mismo sistema se puede caracterizar con una medida derivada de la información mutua, llamada “integración”. Estas medidas han sido reconciliadas en una magnitud introducida como “complejidad neural”<sup>8,9</sup>, la cual cuantifica el balance entre segregación e integración en los procesos cerebrales. Actualmente se estudia el comportamiento de esta medida en diferentes estados cognitivos, así como en estados patológicos y espontáneos<sup>10,11</sup>. Otras medidas que caracterizan la dinámica de un sistema también pueden servir para el establecimiento de las interacciones o identificación de las redes involucradas. En este sentido, medidas derivadas del análisis en el dominio de la frecuencia como la coherencia espectral y otras derivadas del análisis tiempo-frecuencia y más general, espacio-tiempo-frecuencia, pudieran utilizarse como indicadores de la conectividad funcional.

Por último, tenemos el nivel de la actividad cognitiva

superior o actividad consciente, que involucra una o varias de las redes especializadas e integradas dentro del cerebro. Con esta se muestran las propiedades emergentes de toda la actividad neural, usualmente explicadas por teorías no relacionadas directamente con las leyes de interacción básica entre las poblaciones de neuronas que hemos explicado. Para el estudio de estas propiedades emergentes y su vinculación con las reglas de funcionamiento de las neuronas, la conectividad anatómica y la funcional, no sólo es imprescindible el uso de las modernas técnicas de neuroimágenes, sino también el desarrollo de nuevos modelos físicos y métodos matemáticos particularizados al sistema en cuestión. En las tres próximas secciones se describirán brevemente y por separado, algunos modelos y métodos desarrollados por nosotros para la caracterización de la conectividad anatómica, efectiva o funcional y la aplicación de esta última al estudio de estados cognitivos.

### 3 Conectividad anatómica

Las imágenes de resonancia magnética de la difusión del agua (IRMD) proveen mapas de los desplazamientos microscópicos de las moléculas de agua que ocurren en los tejidos cerebrales<sup>12</sup>. Las IRMD son sensibles a la dirección espacial en que se realiza la medición, de forma que el empleo de gradientes de campos magnéticos orientados en diferentes direcciones permite el estudio de tejidos fibrosos tales como la sustancia blanca y músculos, en los cuales la difusión del agua tiene direcciones preferenciales a lo largo de las fibras. Por tanto, es posible calcular constantes de difusión a lo largo de diferentes direcciones para cuantificar la anisotropía así como las orientaciones locales de las fibras en el entorno microscópico del voxel estudiado. La resolución espacial de esta técnica es del orden de  $1 \text{ mm}^3$ , de manera que en un voxel existen en realidad haces que comprenden miles de fibras nerviosas que conectan grandes masas neuronales.

La anisotropía del proceso de la difusión puede ser modelada mediante el formalismo del tensor de difusión<sup>13</sup>, a través del cual la dependencia direccional de la señal adquirida en el equipo de resonancia magnética es explicada por un tensor simétrico de segundo orden que caracteriza como varía la difusión en el espacio. Para estimar el tensor de difusión en cada voxel es necesario adquirir la señal en al menos siete direcciones no colineales, seis para computar los elementos independientes del tensor y una para estimar el valor de la señal adquirida en ausencia de gradientes de campos magnéticos.

Generalmente se asume que en un voxel del cerebro, la dirección en la cual ocurre la mayor difusión, representada por el autovector principal del tensor de difusión, coincide con la orientación de las fibras nerviosas que pasa por ese voxel<sup>14</sup>. Esto permite trazar los caminos que siguen las fibras al unir las diferentes zonas cerebrales, lo cual es conocido como tractografía. Los caminos calculados representan de forma aproximada la configu-

ración de las fibras en la materia blanca. Existen múltiples métodos para la estimación de los caminos de las fibras nerviosas, los cuales pueden dividirse en cuatro tipos fundamentales: Técnicas de propagación de líneas<sup>15</sup>; Métodos de minimización de la energía<sup>16</sup>; Métodos que le confieren un carácter probabilístico a los caminos<sup>17</sup> y Métodos de propagación de frentes de onda<sup>18</sup>.

Dada la importancia de la determinación de la conectividad anatómica para el estudio del funcionamiento normal y patológico del cerebro, es importante lograr una cuantificación de la misma. Pese a que aún no hay un consenso en cual es el descriptor más adecuado, existen varias medidas para cuantificar las conexiones anatómicas entre las regiones del cerebro. Generalmente estas tienen en cuenta el número relativo de caminos probabilísticos que comparten dos puntos con respecto a la cantidad de caminos generados, la probabilidad del camino más probable y la sección transversal que ocupan los caminos calculados sobre las superficies de las zonas conectadas.

Nosotros hemos desarrollado un método para trazar la trayectoria de fibras nerviosas, basados en el carácter probabilístico de los caminos calculados<sup>19</sup>. El algoritmo utilizado toma en cuenta no sólo los autovectores principales del tensor de difusión medidos en cada voxel sino también los de los voxeles vecinos, de forma que pueda existir cierta flexibilidad y robustez en la estimación de la dirección de los haces de fibras. Esto es importante pues en los voxeles en que existan cruces de fibras los tensores de difusión medidos pueden no tener un autovector principal con autovalor mucho mayor que los demás o tenerlo orientado en una dirección intermedia a las correspondientes a las fibras que se cruzan o dividen<sup>20</sup>.

Para trazar el camino a partir de un voxel, dado por el vector de posición  $\vec{q}_i$ , se escogen aleatoriamente  $L_j$  vectores unitarios  $\vec{r}_{ij}$  que formen con el vector  $\vec{v}_i = \vec{q}_i - \vec{q}_{i-1}$ , (indica la última dirección en la cual avanzó el camino), un ángulo menor que cierto valor  $\theta$  establecido, lo que constituye una restricción de curvatura. Para cada uno de estos vectores, se define la probabilidad de que el camino siga su dirección como:

$$P_{ij} = \frac{1}{Z_i} \frac{e^{\left( \frac{1}{M_i} \sum_{k=1}^{M_i} |\vec{e}_k \cdot \vec{r}_{ij}| \right)} - 1}{e - 1}$$

Aquí  $M_i$  es la cantidad de voxeles vecinos que aportarán información sobre la dirección a seguir.  $\vec{e}_k$  es el autovector principal del tensor de difusión en el voxel vecino  $k$  y  $\vec{e}_k \cdot \vec{r}_{ij}$  representa el coseno del ángulo que forman ambos vectores.  $Z_i$  es una constante de normalización. De esta forma las direcciones más probables son aquellas que tengan una mayor colinealidad con los au-

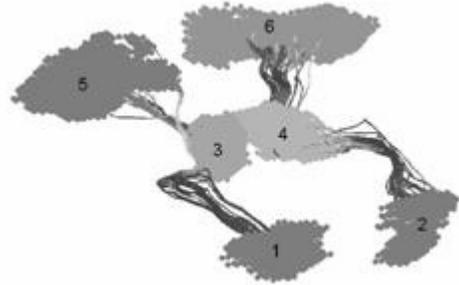
tovectores principales de los voxeles vecinos.

Del conjunto de vectores unitarios  $\vec{r}_{ij}$ , es escogido el vector de avance  $\vec{r}_{ij}^*$  al que corresponde la probabilidad  $P_{ij}^*$  obtenida de muestrear aleatoriamente en el conjunto de probabilidades  $P_{ij}$ . Cuando existen dos o más direcciones con altas probabilidades para seguir el camino, lo cual es típico en el caso de cruce de fibras o al dividirse una fibra en otras, la elección entre estas direcciones predominantes ocurre al azar y no de forma determinista, lo cual se realiza con el objetivo de que, al efectuar varias repeticiones del algoritmo descrito, los caminos trazados representen a la mayor cantidad de trayectorias posibles a pesar de la incertidumbre implícita en los datos.

Luego, la nueva posición ( $i+1$ ) se calcula combinando la dirección más probable  $\vec{r}_{ij}^*$  con el tensor de difusión  $D_i$  en este punto y definiendo un tamaño de paso de avance  $\mu$  dentro del cerebro:  $\vec{q}_{i+1} = \vec{q}_i + \mu \cdot D_i \cdot \vec{r}_{ij}^*$ .



**Figura 1.** Caminos entre el polo occipital izquierdo (1) y el polo occipital derecho (2). Los tálamos (3 y 4) se representan en virtud de establecer una referencia anatómica que ayude a entender la posición en el cerebro de los caminos trazados

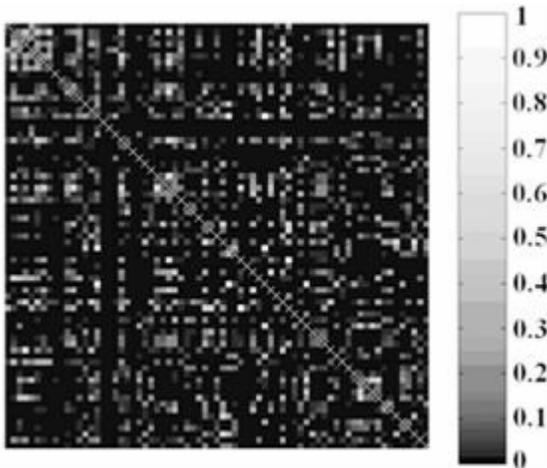


**Figura 2.** Caminos entre: Tálamo izquierdo (3)–Polo occipital izquierdo (1), Tálamo derecho (4)–Polo occipital derecho (2), Giro frontal medio izquierdo (5)–Tálamo izquierdo (3), Giro frontal medio derecho (6)–Tálamo derecho (4).

El camino se comienza en un voxel de la zona de partida escogida y en el primer paso las direcciones escogidas no tienen restricción de curvatura. El procedimiento se realiza paso a paso hasta que el camino cumpla con alguna de las condiciones de parada: a) el arribo a un voxel de la zona de llegada, b) el arribo a un voxel donde el tensor de difusión es nulo, y/o c) la superación de un número de pasos máximo establecido según el largo que generalmente poseen las fibras nerviosas. En las figuras

1 y 2 se ilustra la reconstrucción de caminos de fibras nerviosas entre diversas zonas cerebrales de un sujeto normal mediante este algoritmo de tractografía.

La reconstrucción extensiva de caminos de fibras en todo el cerebro permite caracterizar la conectividad anatómica cerebral por medio de una matriz que cuantifica la conectividad entre las distintas áreas. En nuestro caso, la conectividad anatómica entre las zonas A y B se considera proporcional al área que sobre sus superficies ocupan las fibras nerviosas que las unen. Esta se estima contando el número de voxels sobre las superficies de A y B que están involucrados en la conexión mutua a través de los caminos calculados, donde cada voxel es pesado por un coeficiente denominado índice de validez, el cual refleja, en un rango de valores de cero a uno, qué tan bien el camino que une este voxel a la zona de llegada describe la trayectoria de fibras nerviosas, dado el campo vectorial definido por el autovector principal de los tensores de difusión<sup>19</sup>. En la figura 3 se muestra la matriz de conectividad anatómica calculada entre 71 zonas cerebrales.



**Figura 3.** Matriz de conectividad anatómica directa entre 71 zonas cerebrales de un sujeto normal. El elemento  $i,j$  de esta matriz simétrica corresponde al valor de la conectividad entre las zonas  $i$  y  $j$ . Los elementos fueron normalizados y varían en el intervalo  $[0,1]$ .

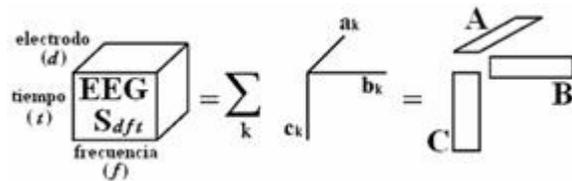
De esta forma, a partir de las IRMD se pueden extraer propiedades locales de los tejidos como son su geometría y orientación espacial. A través de estas es posible inferir, entre otras cosas, propiedades de la conducción eléctrica en los tejidos excitables<sup>21</sup>. Además, la matriz de conectividad anatómica obtenida con el método de estimación de trayectorias de fibras, podría emplearse como información adicional o restricciones en los algoritmos de estimación de la conectividad funcional o efectiva. Finalmente, la comparación entre individuos de los patrones de conectividad anatómica puede proveer de información valiosa para aplicaciones clínicas en trastornos cerebrales que involucran la degeneración o pérdida de los tejidos cerebrales, tales como el Alzheimer, la dislexia, la esquizofrenia y otras.

## 4 Conectividad funcional. Descomposición espacio-tiempo-frecuencia

El EEG es un reflejo de la suma de la actividad eléctrica (potenciales postsinápticos) de millones de neuronas<sup>22</sup>. Existe consenso en considerar que estas neuronas se auto-organizan en redes que se sincronizan en tiempo y espacio para producir una mezcla de actividad oscilatoria en ráfagas cortas que son observables en el registro de EEG<sup>23</sup>. Por tanto es de suponer que las zonas cerebrales cuyas actividades eléctricas tienen similares propiedades espaciales, temporales o dinámicas y espectrales, estén “funcionalmente conectadas” en el procesamiento de una información común.

Para la identificación de estas redes dentro de la actividad conjunta medida, es necesaria la descomposición del EEG en modos o componentes con características específicas. Trabajos anteriores se han limitado a la descomposición en sólo dos de las 3 dimensiones intrínsecas del EEG. Entre ellos los más populares han sido el Análisis de Componentes Principales y el Análisis de Componentes Independientes, los cuales fundamentalmente se han usado para la caracterización espacio-temporal. Estos métodos sufren de una inherente no unicidad que es superada sólo por la imposición de restricciones de ortogonalidad e independencia estadística de las componentes respectivamente. Por otro lado, el uso de la transformada rápida de Fourier con ventanas deslizantes (TRFVD)<sup>24</sup>, el análisis “wavelet”<sup>25</sup>, el método de “Matching Pursuit”<sup>26</sup>, y otros<sup>27</sup>, permiten una descomposición tiempo-frecuencia de la señal en un electrodo. Sin embargo, estos no toman en cuenta las características espaciales de la actividad analizada.

Recientemente, nosotros propusimos una descomposición del EEG simultáneamente en espacio-tiempo-frecuencia, a partir del uso de un modelo multilineal para el espectro variante en el tiempo del EEG ( $S_{dft}$ )<sup>28</sup>.



**Figura 4.** Esquema de la descomposición PARAFAC de un arreglo tridimensional. En este caso el espectro variante en el tiempo del EEG ( $S_{dft}$ ) se descompone en la suma de  $k$  componentes, cada una de las cuales es el producto tensorial de tres vectores. Estos ofrecen perfiles de los datos en cada dimensión: el perfil temporal ( $\mathbf{c}_k$ ), el perfil espectral ( $\mathbf{b}_k$ ) y el espacial ( $\mathbf{a}_k$ ). Las matrices **A**, **B** y **C** contienen como columnas los perfiles correspondientes de las distintas componentes.

El espectro de la señal medida en cada electrodo en distintos instantes de tiempo puede ser calculado con el uso de la TRFVD o la transformada “wavelet”. Este

puede disponerse en un arreglo tridimensional cuyas dimensiones la conforman el número de electrodos, el número de frecuencias usadas para el cálculo del espectro y el número de instantes de tiempo (ver figura 4).

El modelo multilinear para cada elemento de esta matriz 3D se expresa en la ecuación:

$$S_{dft} = \sum_{k=1}^{Nk} a_{dk} b_{fk} c_{tk} + e_{dft}$$

la cual representa una descomposición en una suma de  $Nk$  componentes, donde cada componente es el producto tensorial (o externo) de tres vectores o tensores de primer orden. A estos vectores se les llaman perfiles espacial ( $\mathbf{a}_k$ ), espectral ( $\mathbf{b}_k$ ) y temporal ( $\mathbf{c}_k$ ). En el modelo hemos tenido en cuenta explícitamente los elementos  $e_{dft}$  que representan los ruidos experimentales o aquella actividad no comprendida en la descomposición.

Este modelo recibe el nombre de Análisis de Factores Paralelos (PARAFAC), fue propuesto por primera vez por Harshman<sup>29</sup> y desarrollado por Bro<sup>30</sup>. Se ha utilizado ampliamente en ramas como la quimiometría pero esta es la primera vez que se utiliza en el análisis de datos multidimensionales de EEG. La gran ventaja de este modelo es que esta descomposición es única bajo la condición:

$$2(Nk + 1) \leq \text{rango}(\mathbf{A}) + \text{rango}(\mathbf{B}) + \text{rango}(\mathbf{C}),$$

la cual es mucho menos fuerte que la de imponer ortogonalidad o independencia estadística a las componentes. Por supuesto, el modelo mantiene las indeterminaciones triviales de escala de los perfiles y del orden de las componentes.

El objetivo entonces es la estimación de las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , lo cual puede hacerse con un algoritmo de mínimos cuadrados alternantes<sup>30</sup>. Esta descomposición permite resumir la información presente en el EEG en los perfiles espacio-tiempo-frecuencia de las redes activas, ofreciendo una interpretación directa y parsimoniosa. El perfil espacial de una componente nos da un mapa topográfico sobre el cuero cabelludo de la actividad eléctrica con características tiempo-frecuencia definidas por los perfiles temporal y espectral. De la misma forma, el perfil espectral no es más que el espectro que caracteriza dicha actividad y el temporal la evolución del mismo en el tiempo. Con el uso de métodos de soluciones inversas a partir del perfil espacial, podrían estimarse las áreas del cerebro activadas con el correspondiente perfil espectral y temporal, lo que permite identificar la red funcional y sus características espacio-tiempo-frecuencia.

## 5 Causalidad

Los métodos de estudio de las redes complejas pueden ser útiles también en la determinación de cómo se conectan las regiones del cerebro ante la solución de una tarea u otro estado cognitivo. La reconstrucción de la topología de una red a partir de mediciones de la actividad temporal de sus nodos ha sido desarrollada recientemente a

través de modelos grafos y causalidad<sup>31,32</sup>, encontrando múltiples aplicaciones<sup>33</sup> y proponiendo diferentes metodologías, siendo el uso de modelos autoregresivos multivariados y la causalidad de Granger la más popular<sup>32,34,35</sup>. Sin embargo, los algoritmos (PC, TETRAD) comúnmente utilizados son computacionalmente impracticables para la dimensión de los problemas biológicos. Por ejemplo, en las neurociencias la aplicación más difundida ha sido el uso de las IRMf<sup>6,32,34</sup>, que miden la señal BOLD en unos  $10^4$  voxels (nodos) de la corteza cerebral. El número de mediciones de la serie de tiempo de cada voxel en un experimento típico no sobrepasa los 200 ó 300, de forma que siempre es mucho más pequeño que el número de voxels. Estas redes se caracterizan por matrices de covarianzas mal condicionadas y son frecuentes en neurociencias y bioinformática.

En una publicación reciente nuestro grupo introdujo el planteamiento general de la dinámica de una red en forma de un modelo multivariado autorregresivo de primer orden (MAR1)<sup>36</sup>. Si ordenamos los  $n$  nodos de una red para crear el vector  $y_{t(n \times 1)}$  de mediciones en el tiempo  $t$ , podemos plantear el modelo MAR1 de la forma  $y_t = \beta y_{t-1} + e_t$ , donde la matriz  $\beta_{(n \times n)}$  contiene los coeficientes autorregresivos que cuantifican la conexión entre los nodos. El vector  $e_t$  representa los ruidos experimentales o imprecisiones en las mediciones, el cual se asume generalmente como ruido blanco. El hecho de que el modelo escogido sea de primer orden presupone que la actividad en un nodo sólo depende de la actividad de los nodos conectados a él en el momento inmediato anterior.

El objetivo en este caso es la estimación de la matriz  $\beta$ , cuya estructura (coeficientes diferentes de cero) define la conectividad entre los nodos (topología de la red). Para esto introducimos el uso de modernas técnicas de regresión lineal múltiple con penalización<sup>36</sup>, las cuales se han desarrollado en el campo de las matemáticas numéricas para tratar el problema de las ecuaciones lineales mal condicionadas<sup>37</sup>. En su formulación general, el objetivo de la regresión lineal es la explicación de una variable  $y$  en términos de un conjunto de variables  $X$ , a través de un modelo lineal:  $y = X\beta$

El problema matemático radica en estimar los coeficientes  $\beta$ , lo que se puede escribir como un problema de optimización:  $\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \|y - X\beta\|^2$ . Para proble-

mas bien condicionados la solución analítica ha sido bien estudiada y se conoce como la solución "mínimos cuadrados". Sin embargo, cuando el número de variables es mucho mayor que el número de mediciones, este problema no tiene solución única, pues es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales indeterminado. La restricción del espacio de soluciones posibles es actualmente un campo de trabajo en estadística de gran aplicación en problemas de alta dimensionalidad<sup>38</sup>. Esta restricción del espacio de soluciones se puede escribir como un

nuevo problema de optimización sujeto a ligaduras, lo cual convierte al problema mal condicionado en un problema con solución única. Por ejemplo:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \|y - X\beta\| \quad \text{sujeto a } f(\hat{\beta}) < \text{cte}$$

La función de penalización  $f(\hat{\beta})$  depende de la aplicación en estudio o de los intereses del investigador y existe una amplia variedad de posibles ejemplos<sup>37</sup>. Una suposición lógica en el análisis de datos de neuroimágenes es plantear la restricción de que voxels vecinos tengan valores similares de  $\beta$ , lo cual puede verse como una exigencia de suavidad en los coeficientes. Esto puede lograrse estableciendo la ligadura de minimización de sus segundas derivadas. Otra exigencia deseable es que la solución responda a un modelo simple, lo que implica que sólo unos pocos  $\beta_i$  son diferentes de cero. Esta característica es conocida en la literatura como “esparcidad”.

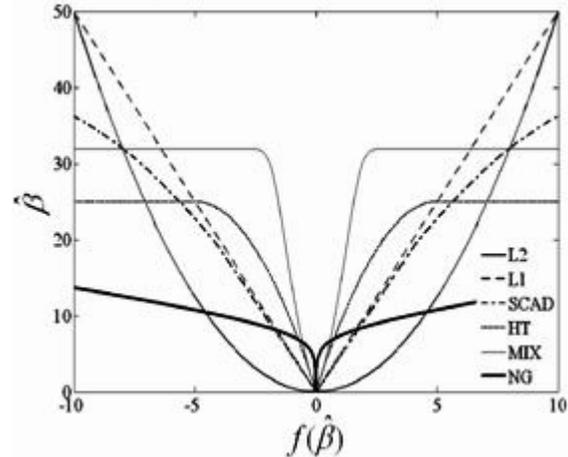
Por otra parte, el problema de minimización requiere de nuevos algoritmos de optimización. Nosotros proponemos el uso de una variante del algoritmo EM (“*expectation-maximization*”) conocida como MM (“*minorization-maximization*”)<sup>39</sup>. Esta permite el uso de una gran variedad de funciones de penalización, dentro de las cuales las más conocidas se muestran en la figura 5. En la próxima sección presentaremos la aplicación de esta metodología al análisis de datos de IRMf en una tarea de reconocimiento de caras y la aplicación del modelo PARAFAC a datos de EEG recogidos durante una tarea de cálculo mental.

## 6 Actividad mental

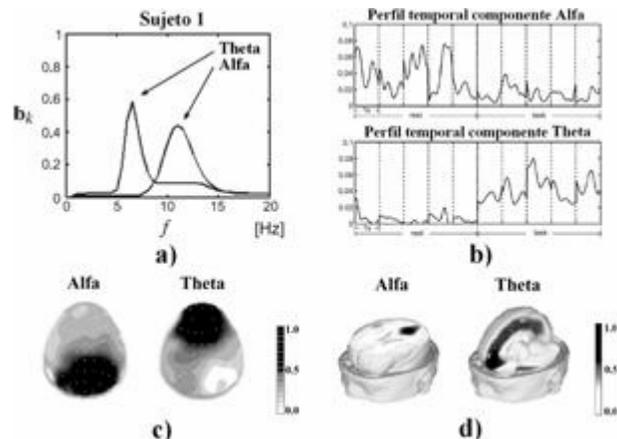
Tanto la actividad espontánea del cerebro como la sensorial y cognitiva, se debe a la interacción sincronizada en espacio, tiempo y frecuencia de poblaciones de neuronas a través de las redes anatómicas creadas en el cerebro. El uso de métodos que permitan descomponer la actividad eléctrica, así como el estudio de las relaciones causales entre las respuestas hemodinámicas de distintas zonas del cerebro, puede contribuir al esclarecimiento de las reglas que rigen la integración de información que da lugar a la actividad mental superior.

**Cálculo mental.** En la ref. [28] se utilizó el modelo PARAFAC para la caracterización espacio-tiempo-frecuencia de la actividad eléctrica cerebral producida durante el cálculo mental. Los EEG de 5 sujetos varones derechos (edad media de 25,8 años) fueron registrados con 64 electrodos y referencia a las orejas cortocircuitadas. La tarea consistió en realizar durante 3 minutos un cálculo aritmético (substrae 7 de 1000 consecutivamente) con los ojos cerrados y sin presentación de otro tipo de estímulo visual o auditivo. También se registraron períodos equivalentes de reposo mental con ojos cerrados. Luego de la transformación “wavelet” (usando una función madre Morlet<sup>25</sup> de estos datos, el espectro variante en el tiempo es obtenido como una matriz 3D,

como se muestra en la figura 4. En esta se agruparon en la secuencia temporal 5 segmentos de 1 segundo del período correspondiente a la tarea y 5 de igual longitud del período de reposo.



**Figura 5.** Funciones de penalización usadas en la implementación de técnicas de regresión. Las abreviaturas corresponden a los tipos de penalizaciones correspondientes: regresión “ridge” (L2); LASSO (L1); “Smoothly Clipped Absolute Deviation” (SCAD); “hard thresholding” (HT); mezcla de gaussianas generalizadas (MIX); distribución Normal-Gamma (NG). Más detalles sobre estas se pueden encontrar en<sup>36</sup>. La discontinuidad de la derivada de estas funciones en cero asegura la obtención de esparcidad en la solución.



**Figura 6.** Caracterización espacio-tiempo-frecuencia de las redes activas en un experimento de cálculo mental. Dos componentes (Alfa y Theta) fueron extraídas con el análisis PARAFAC. Para un sujeto típico (sujeto 1) se muestran los perfiles a) espectrales, b) temporales y c) espaciales. En d) se muestra la reconstrucción del espectro de las fuentes.

La descomposición PARAFAC de esta matriz arrojó en todos los sujetos dos componentes cuyos perfiles espectrales mostraron picos en los rangos de frecuencias correspondientes a las actividades alfa y theta (Figura 6a). El uso de una medida llamada Corcondia<sup>30</sup> sugirió que estas dos componentes son suficientes para explicar los datos, ofreciendo valores mayores del 90% (100% es el óptimo). Los perfiles temporales mostraron que durante la tarea la actividad theta es mayor mientras que la

actividad alfa está reducida. Lo opuesto ocurre en los segmentos de reposo (Figura 6b). Finalmente, en la Figura 6c se muestran las distribuciones topográficas (perfiles espaciales) de ambas componentes. Todas estas se muestran para un sujeto típico. El espectro de las fuentes generadoras correspondientes se calcularon con el uso del método de solución inversa “*Source Spectra Imaging*”<sup>28</sup> y se muestran en forma de tomografías en la Figura 6d.

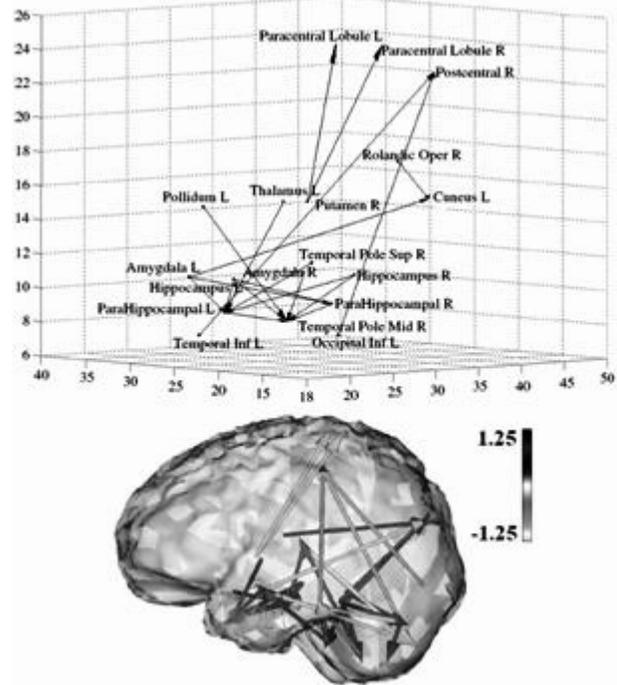
Estos resultados permiten identificar dos redes principales actuando simultáneamente en el cerebro durante el experimento. La primera muestra una dinámica oscilatoria alrededor de 10Hz, conocida como ritmo alfa<sup>40</sup>. Presenta una distribución topográfica de la potencia del espectro con altos valores en los electrodos posteriores y sus generadores principales aparecen en la corteza occipital. Estos resultados están en correspondencia con estudios anteriores sobre la localización y características espectrales de este ritmo<sup>41</sup>. La segunda red está formada por poblaciones de neuronas principalmente de la zona frontal, en el área anterior-cingular. Estas producen oscilaciones de mayor amplitud en electrodos frontales con una frecuencia entre 6 y 8 Hz, las cuales se conocen como ritmo theta.

Hay que señalar que aunque el uso de estas técnicas permite caracterizar el comportamiento macroscópico de la actividad de grandes redes de neuronas, es difícil decir si las neuronas en sí mismas tienen actividades oscilatorias a estas mismas frecuencias. También cabe señalar que los métodos de solución inversa lineales, como el usado en este trabajo para encontrar los generadores de los componentes extraídos, son incapaces de recoger actividad generada en zonas profundas del cerebro<sup>42</sup>. Esto hace posible que áreas profundas, (como el tálamo), que se sospecha juega un papel importante en la generación de ritmos cerebrales, no se hayan podido identificar como parte de las redes de neuronas responsables de estas actividades.

**Procesamiento de caras.** Un ejemplo interesante de cómo las regiones funcionales se sincronizan y regulan son los experimentos de reconocimiento de emociones. El estudio de las emociones, que ha sido retomado por la psicología cognitiva, se propone estudiar qué regiones son las responsables de reconocer y clasificar las emociones. En la ref. [36] utilizamos datos reales de un experimento en el que al sujeto se le presenta una secuencia de imágenes de rostros en dos condiciones: algunos con expresiones neutras y otros con expresiones de miedo. En este caso se recoge la actividad cerebral mediante IRMf. Para simplificar el análisis, el cerebro se segmenta automáticamente en 116 estructuras anatómicas diferentes y a cada una de ellas se le asocia el promedio de las series de tiempo de todos sus voxels.

El modelo MAR1 fue ajustado con regresión *ridge* a ambas condiciones y se estimó una matriz de conectividad funcional entre las regiones propuestas a partir del contraste entre una condición y otra. Con la ayuda del método de “*false discovery rate*” (FDR) se determinaron los umbrales de conectividad a partir del estadígrafo *t* del

contraste. De esta forma es posible establecer un grafo de la red de conexiones significativas que se derivan de la diferencia entre la condición cara con miedo y cara sin miedo. Esta red nos informa cuáles son aquellas regiones del cerebro que son específicas al reconocimiento de la emoción y cómo están conectadas entre sí (Figura 7).



**Figura 7.** Grafo de las conexiones que cambian ante rostros con expresión de miedo. Obtenido por la comparación elemento a elemento de las matrices autorregresivas correspondientes a caras con miedo contra caras neutras. Se muestran sólo las conexiones por encima del umbral FDR. En la parte baja se muestra el mismo grafo pero con localización realista dentro del cerebro. La escala de grises define el valor de la conectividad funcional

Resulta interesante la aparición de áreas que se conocen están involucradas en el procesamiento de estímulos emocionales, como la amígdala, el hipocampo y el giro parahippocampal. Por otra parte, las conexiones al área fusiforme, donde se procesa el reconocimiento de caras en general no aparecen, ya que tienen aproximadamente el mismo nivel en ambas condiciones. Finalmente, otro resultado interesante es la confirmación del papel determinante de la amígdala en el procesamiento de las emociones, ya que esta es uno de los nodos de mayor conectividad en la red.

## 7 Conclusiones

Como hemos visto, la emergencia de actividad cognitiva en el ser humano es el resultado del funcionamiento especializado e integrado de grandes masas neuronales dentro del cerebro. Esta actividad es muy difícil de explicar en términos de la actividad básica de las neuronas

y de las reglas simples de su interacción con otras. Tales propiedades nos llevan al reconocimiento del cerebro como un sistema complejo cuyo estudio es imprescindible realizar en diferentes escalas. En este escenario, es muy importante el enfoque multidisciplinario en el análisis de la actividad cerebral a través de un gran número de técnicas de neuroimágenes. Dado el gran auge que ha tenido la rama de la “complejidad” entre la comunidad de físicos, es muy importante el rol que estos han sido llamados a desempeñar en las neurociencias modernas.

En este trabajo mostramos el acercamiento al estudio del cerebro por parte de un grupo de investigadores del Centro de Neurociencias de Cuba, enfocado desde la perspectiva del cerebro como sistema complejo. Particular importancia cobra la interpretación del mismo como una red compleja con características muy particulares que hacen necesaria una aproximación desde tres niveles diferentes: el estudio de la conectividad anatómica, el de la conectividad funcional y el de la actividad cognitiva.

Se expuso una pequeña parte del trabajo desarrollado en el centro para demostrar la factibilidad del uso de imágenes de resonancia magnética de difusión del agua para la estimación de los caminos o haces de fibras nerviosas en el cerebro. Esto no sólo permite identificar qué zonas cerebrales están físicamente conectadas entre sí, sino también realizar una caracterización cuantitativa de esa conexión. Esta caracterización podría servir para el diagnóstico de patologías relacionadas con cambios estructurales en el cerebro y a la vez daría información importante en forma de restricciones para la posible conectividad funcional o efectiva entre estas zonas.

La conectividad funcional se refiere a aquella interacción entre grandes masas neuronales en pos del procesamiento e integración de información sobre un mismo proceso cerebral. Por ejemplo, es conocido que las vías sensoriales tienen un camino por donde se procesa la información, de forma que pasan de unas zonas del cerebro a otras. Sin embargo, la forma de esta interacción, las características espaciales, espectrales y dinámicas no son totalmente conocidas. En este trabajo presentamos brevemente sólo 2 aproximaciones al estudio de la conectividad funcional: la identificación de las redes mediante la descomposición de la actividad eléctrica en espacio-tiempo-frecuencia y el análisis de la causalidad a partir de imágenes de resonancia magnética funcional.

Mostramos que con el uso de una acertada modelación física y de los algoritmos matemáticos apropiados, es posible caracterizar espacial, temporal y espectralmente las redes locales (o subconjuntos del cerebro como red mayor) encargadas de generar determinados ritmos cerebrales o relacionadas con el procesamiento cognitivo. A la vez, es posible determinar la topología de estas redes con un análisis de causalidad que establezca una conectividad efectiva. Cabe señalar que un número significativo de investigaciones se están llevando a cabo en el mundo en estos temas con gran cantidad de enfoques diferentes propuestos.

Finalmente, el estudio de las propiedades emergentes del cerebro, expresadas como actividad cognitiva supe-

rior, se realiza a partir de la aplicación de las nuevas metodologías a datos que reflejan la actividad neural durante estos estados cognitivos. Todo esto induce a pensar además que el uso de medidas de complejidad y otras técnicas para el estudio de sistemas complejos que actualmente se desarrollan o se aplican en otras áreas de la ciencia, podrían traer nuevas interpretaciones en su aplicación a las neurociencias y arrojar luz en el entendimiento del funcionamiento cerebral.

## Referencias

1. P.W. Anderson, “Is complexity physics? Is it science? What is it?” *Physics Today*, July 1991, 9-10 (1991).
2. T. Vicsek, “The bigger picture.” *Nature* 418, 131 (2002).
3. A.C. Soong, C.I. Stuart, “Evidence of chaotic dynamics underlying the human alpha-rhythm electroencephalogram.” *Biol Cybern* 62, 52-62 (1989).
4. T. Elbert, W.J. Ray, A.J. Kowalik, J.E. Skinner, K.E. Graf, N. Birbaumer, “Deterministic chaos in excitable cell assemblies.” *Physiol Rev* 74,1-47 (1994).
5. R. B. Buxton, *An Introduction to Functional Magnetic Resonance Imaging: Principles and Techniques* (Cambridge University Press, 2002).
6. D.R. Chialvo, “Critical brain networks.” *Physica A*, 340, 756-765 (2004).
7. K.J. Friston, “Functional and effective connectivity in neuroimaging: a synthesis.” *Human Brain Mapping*, 2, 56-78 (1994).
8. G. Tononi, O. Sporns, G.M. Edelman, “A measure for brain complexity: relating functional segregation and integration in the nervous system.” *Proc Natl Acad Sci USA*, 91, 5033-37 (1994).
9. G. Tononi, G.M. Edelman, “Consciousness and complexity.” *Science*, 282, 1846-51 (1998).
10. M.J.A.M. van Putten, C.J. Stam, “Application of a neural complexity measure to multichannel EEG.” *Physics Letters A*, 281, 131-141 (2001).
11. N.M. Branston, W. El-Deredy, F.P. McGlone, “Changes in neural complexity of the EEG during a visual oddball task.” *Clinical Neurophysiology*, 116, 151-159 (2005).
12. E.O. Stejskal, J.E. Tanner, “Spin diffusion measurements: spin echoes in the presence of a time-dependent field gradient.” *J. Chem. Phys.* 42, 288-292 (1965).
13. P.J. Basser, J. Mattiello, D. Le Bihan, “Estimation of the effective self-diffusion tensor from the NMR spin echo.” *J. Magn. Reson., Ser. B*, 103, 247-254 (1994).
14. P. Douek, R. Turner, J. Pekar, N.J. Patronas, D. Le Bihan, “MR color mapping of myelin fiber orientation.” *J. Comput. Assist. Tomogr.* 15, 923-929 (1991).
15. S. Mori, B.J. Crain, V.P. Chacko, P.C.M. Van Zijl, “Three-dimensional tracking of axonal projections in the brain by magnetic resonance imaging.” *Ann. Neurol.*, 45, 265-269 (1999).
16. C. Poupon, J.F. Mangin, V. Frouin, J. Regis, J.F. Poupon, M. Pachot-Clourand, D. LeBihan, I. Bloch, “Regularization of the MR Diffusion Tensor Maps for Tracking Brain White Matter Bundles.” W. M. Wells et al (Eds): *MICCAI'98, LINC'S* 1496, 489-498 (1998).
17. G.J.M. Parker, H.A. Haroon, C.A.M. Wheeler-Kingshott, “A framework for a streamline-based probabilistic index of connectivity (PICO) using a structural interpretation of MRI diffusion measurements.” *J. Magn. Reson. Imaging*, 18, 242-254 (2003).

18. G.J.M. Parker, K.E. Stephan, G.J. Barker, J.B. Rowe, D.G. MacManus, C.A.M. Wheeler-Kingshott, O. Ciccarelli, R.E. Passingham, R.L. Spinks, R.N. Lemon, R. Turner, "Initial demonstration of in vivo tracing of axonal projections in the macaque brain and comparison with the human brain using diffusion tensor imaging and fast marching tractography." *NeuroImage*, 15, 797-809 (2002).
19. Y. Iturria, P.A. Valdés-Hernández, "De las Imágenes de la Difusión a la Conectividad Anatómica Cerebral." *Rev. Cenic C. Biológicas*, (2004).
20. D.S. Tuch, T.G. Reese, M.R. Wiegell, N. Makris, J.W. Belliveau, V.J. Wedeen, "High angular resolution diffusion imaging reveals intravoxel white matter fiber heterogeneity." *Magn Reson. Med.*, 48, 4, 577-582 (2002).
21. D.S. Tuch, V.J. Wedeen, A.M. Dale, J.S. George, J.W. Belliveau, "Conductivity tensor mapping of the human brain using diffusion tensor MRI." *Neurobiology*, 98, 20, 11697-11701 (2001).
22. F. Lopes da Silva, "EEG analysis: theory and practice". In *Electroencephalography*, edited by E. Niedermeyer, F. Lopes da Silva, (Urban and Schwartzberg. 1987).
23. F. Varela, J.P. Lachaux, E. Rodriguez, J. Martinerie, "The brainweb: phase synchronization and large-scale integration." *Nature Review Neuroscience*, 2, 229-239 (2001).
24. S. Makeig, "Auditory event-related dynamics of the EEG spectrum and effects of exposure to tones." *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.*, 86, 283-293 (1993).
25. C. Tallon-Baudry, O. Bertrand, C. Delpuech, J. Pernier, "Oscillatory g-band (30- 70 Hz) activity induced by a visual search task in humans." *Journal of Neuroscience*, 17, 722-734 (1997).
26. P.J. Durka, K.J. Blinowska, "Analysis of EEG transients by means of matching pursuit." *Ann. Biomed. Eng.*, 23, 608-611 (1995).
27. S.S. Chen, D.L. Donoho, M.A. Saunders, "Atomic decomposition by basis pursuit." *SIAM Rev*;43(1):129-59 (2001).
28. F. Miwakeichi, E. Martínez-Montes, P.A. Valdés-Sosa, H. Mizuhara, N. Nishiyama, Y. Yamaguchi, "Decomposing EEG data into space - time - frequency components using parallel factor analysis." *NeuroImage* 22, 1035-1045 (2004).
29. R.A. Harshman, "Foundations of the PARAFAC procedure: models and conditions for an 'explanatory' multi-modal factor analysis." *UCLA Work. Pap. Phon.* 16, 1-84 (1970).
30. R. Bro, "Multi-way Analysis in the Food Industry: Models, Algorithms and Applications." PhD Thesis. University of Amsterdam (NL) and Royal Veterinary and Agricultural University (DK) (1998).
31. R. Dahlhaus, M. Eichler, J. Sandkuhler, "Identification of synaptic connections in neural ensembles by graphical models." *J. Neurosci. Methods*, 77, 93-107 (1997).
32. M. Eichler, "A graphical approach for evaluating effective connectivity in neural systems." *Philosophical Transactions of The Royal Society B*, 360, 953-967 (2005).
33. M. Newman, "The Structure and Function of Complex Networks." *SIAM Review*, 45, 167-256 (2003).
34. P.A. Valdés-Sosa, "Spatio-temporal autoregressive models defined over brain manifolds." *Neuroinformatics*, 2, 239-250 (2004).
35. M. Kaminski, M.Z. Ding, W.A. Truccolo, S.L. Bressler, "Evaluating causal relations in neural systems: granger causality, directed transfer function and statistical assessment of significance." *Biol. Cybern.*, 85, 145-157 (2001).
36. P.A. Valdes-Sosa, J.M. Sanchez-Bornot, A. Lage-Castellanos, M. Vega-Hernandez, J. Bosch-Bayard, L. Melie-Garcia, E. Canales-Rodriguez, "Estimating brain functional connectivity with sparse multivariate autore-gression." *Philosophical Transactions of the Royal Society B-Biological Sciences* 360, 969-981 (2005).
37. J.Q. Fan and R.Z. Li, "Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties." *Journal of the American Statistical Association* 96, 1348-1360 (2001).
38. T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman, *The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference, and Prediction.* (Springer, New York, 2001).
39. D. R. Hunter, R. Li, "Variable selection using MM algorithms." *Annals of Statistics*, 33, 4, 1617-1642 (2005).
40. S. Szava, P.A. Valdés-Sosa, R. Biscay, L. Galán, J. Bosch, I. Clark, J.C. Jiménez, "High resolution quantitative EEG analysis." *Brain Topography*, 6, 211-219 (1994).
41. R. Casanova, P.A. Valdés-Sosa, F. García, E. Aubert, J. Riera, W. Korin, O. Lins, Frequency domain distributed inverse solutions. In proceedings of the 10th International Conference on Biomagnetism, edited by C.J. Aine, Y. Okada, G. Stroink, S.J. Swithenby, C.C. Wood (Springer-Verlag, New York, 2000).
42. R.D. Pascual-Marqui, "Review of methods for solving the EEG inverse problem." *Int. J. Bioelectromagn.* 1 (1), 75-86 (1999).

## Caos Clásico: un enfoque histórico

Alfo José Batista Leyva

Departamento de Física General y Matemáticas,  
Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas.

Recibido el 15/07/2006. Aprobado en versión final el 13/4/07

**Sumario.** La popularización de los conceptos asociados con el estudio de los sistemas complejos ha provocado que elementos relacionados originalmente con la Teoría del Caos se hayan vuelto de aplicación común en áreas muy alejadas de aquella en la cual fueron definidos. Esto ha traído consigo la pérdida de precisión en las formulaciones, y ambigüedad, las cuales son poco deseables en la ciencia. En este trabajo se hace un resumen de la historia de la Teoría del Caos, precisando conceptos esenciales de la misma muy empleados en otros campos (por ejemplo, en las ciencias sociales), como el de atractor, atractor extraño etc., así como sus rangos de aplicación. Se hace una cuantificación de las posibilidades de un sistema de mostrar características caóticas a través de los exponentes de Lyapunov y, por último, se trazan líneas generales que deberían ser seguidas por todo aquel que quiera utilizar estas herramientas en su trabajo de investigación.

**Abstract.** While the growing interest in the so called Chaos Theory has provoked the application of its fundamentals in areas that are far from the original, at the same time a remarkable lack of precision in the formulations has risen, together with ambiguity, which are absolutely undesirable in science. In the present contribution, a brief history of Chaos Theory is exposed, making points on key concepts that are often used in other areas (for instance social sciences), like attractor, strange attractor and so on, and their range of application. A quantification of chaos is made through the so called Lyapunov exponents, and, finally, an outline of a general procedure is exposed that should be followed by all those involved in chaos research.

**Palabras clave.** Caos, aplicaciones, 05.45.Gg; historia de la ciencia, 01.65.+g

### 1 Introducción

La ciencia, para lograr la comunicación entre sus ramas, necesita de un sistema de conceptos no ambiguo, que al pasar de un campo al otro se redefinan o precisen. Usar conceptos imprecisos implica que aparezca un muro de incomunicación entre las distintas ramas. En un ámbito revolucionario como el que primó en el surgimiento de la teoría del caos, y el que está presente al parecer en los estudios sobre los sistemas complejos, la comunicación entre los distintos campos que se entrecruzan es inevitablemente parcial<sup>1</sup>. Así, debe ser labor constante la depuración del corpus científico de conceptos imprecisos y formulaciones antropocéntricas.

Una de las fuentes básicas de imprecisiones es el uso

de conceptos que tienen sus raíces en el lenguaje cotidiano fuera de su ámbito original. Es difícil concebir un concepto más fuertemente enraizado en la cultura contemporánea que el concepto de caos. Si se le pregunta a cualquier persona qué entiende por caos, por lo general la respuesta vendrá acompañada por la descripción de algo desordenado, sin regla que rija su estructura. Esto está asociado con el hecho de que en prácticamente todas las culturas clásicas occidentales, el caos es el desorden primigenio de la naturaleza, que se contrapone al orden establecido a posteriori por algún demiurgo. Así, en la Biblia, el caos es descrito como un lugar de desorden, sin forma ni concierto, lleno de confusión y a veces vacío o irreal. Este concepto bíblico del caos se ha transculturado, y es un elemento que se ha impregnado en el cono-

cimiento común. Al difundirse lo que en física se conoce como Teoría del Caos, el referente cultural básico que proveyó de sentido semántico al término fue esta idea intuitiva, lo cual ha provocado la proliferación de inexactitudes y errores de concepto. La explicación de esta teoría por escritores de divulgación científica que explotan lo externo sin profundizar en las esencias ha contribuido a aumentar la confusión, no sólo en el público en general, sino también en aquellos que tratan de aplicar conceptos de dicha teoría en regiones alejadas de la original.

Lo dramático es que el caos es un concepto muy popular en la cultura moderna. En el buscador Google se reportan unos 56 000 000 de páginas que tratan dicho tema con enfoques de distinto tipo. Y esa es la fuente principal de búsqueda de información del hombre de nuestra era. Las páginas con contenido de valor científico, como la revista *Chaos*, no son accesibles al público en general, mientras que las páginas no especializadas sí lo son.

Así, con el auge en nuestro país de lo que se algunos llaman "Ciencia de la Complejidad", donde una teoría aún por hacer se encara desde puntos de vista muy variados, tanto en enfoque como en rigor conceptual, los principios de la Teoría del Caos, que de alguna manera se encuentran asociados con los sistemas complejos, requieren ser revisados en aras de la precisión de sus alcances de principio.

Es por esto que nos proponemos hacer una revisión a las ideas esenciales de la Teoría del Caos Clásico, precisando los conceptos esenciales que se han extendido desde dicha teoría y han invadido otras áreas del pensamiento humano, a veces muy alejadas de la original.

## 2 Caos

**2.1 Breve historia del caos.** Aunque la ola actual de estudio del caos puede decirse que comenzó en el año de 1975 con la publicación por Li y Yorke de un artículo titulado "Período tres implica caos"<sup>2</sup>, las ideas básicas de dicha teoría estuvieron en las mentes de los principales pensadores de los siglos XIX y principios del XX.

Tres fueron las vías que confluyeron en este campo:

- 1- El estudio de sistemas dinámicos formados por más de dos cuerpos.
- 2- El estudio de la hipótesis ergódica.
- 3- El estudio de osciladores no lineales.

Luego de la invención del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibnitz, el objetivo fundamental de la mecánica como ciencia del movimiento fue encontrar soluciones analíticas que describieran la dinámica exacta de un sistema físico. La formulación del ideal de la mecánica clásica generalmente se asocia con el nombre de Laplace (recordar la frase "Un intelecto que en un momento dado conociese todas las fuerzas de las cuales está animada la naturaleza, y la situación de los seres que la componen, y que fuese lo suficientemente vasto como para poder someter todos estos datos al análisis, abarca-

ría en la misma fórmula el movimiento de los cuerpos mayores del universo, y el del átomo más ligero; nada sería incierto para él, y el futuro, al igual que el pasado, estarían presentes ante su mirada"<sup>3</sup>). Pero 100 años antes de que se dijera estas palabras, Leibnitz escribió "todo en el mundo procede de manera matemática, esto es, infalible, de forma tal que si alguien posee un conocimiento suficientemente profundo de la parte interna de las cosas y al mismo tiempo tiene memoria e inteligencia suficiente para conocer todas las circunstancias y tenerlas en cuenta, será un profeta, y podrá ver el futuro reflejado en el presente como en un espejo"<sup>4</sup>.

Sin embargo, este programa fue muy difícil de seguir. El método introducido por Newton para integrar el sistema, y que consiste en encontrar una magnitud que se conserve manteniéndose constante en el tiempo para de ahí colegir las coordenadas y el *momentum* de las partículas bajo estudio y que dio resultados exitosos al calcular el movimiento de dos cuerpos que interactúan gravitatoriamente, falló estrepitosamente al tratar de aplicarlo al problema de tres cuerpos.

Entonces se utilizó un nuevo enfoque: a partir de un problema integrable, introduciendo pequeñas perturbaciones, se encontraba la solución de un problema no integrable a través de aproximaciones sucesivas. Es sorprendente la cantidad de problemas de este tipo que se resolvieron, dada la limitada cantidad de sistemas realmente integrables que existen. Sin embargo, el método no siempre era aplicable. Por ejemplo, el problema de tres cuerpos (v. gr. el Sol, la Tierra y la Luna) no admitía ninguna de las soluciones calculadas. El primer signo de dificultades de principio llegó a través de la demostración de un teorema por Burns, que estableció que no hay magnitudes que se conserven en dicho problema, y dependan de manera polinomial de la coordenada y el momento. Si existían dichas magnitudes, debían tener un comportamiento más complicado.

El ideal de Leibnitz y Laplace tenía un defecto aún más profundo: es imposible conocer las condiciones iniciales de un problema con exactitud infinita. En el año de 1873 J. C. Maxwell escribía: "*Es una doctrina metafísica que a partir de iguales antecedentes se obtienen iguales consecuentes. Pero esto no es muy útil en un mundo en el cual los antecedentes nunca se repiten y nada ocurre dos veces... El axioma de la Física debe ser 'de antecedentes similares consecuentes similares'... pasamos de la igualdad a la similitud, de la exactitud absoluta a la aproximación. Hay ciertas clases de fenómenos en los cuales un pequeño error en la data sólo introduce un pequeño error en el resultado, en otros más complicados puede ocurrir la inestabilidad, aumentando el número de estos casos según aumenta el número de variables dinámicas.*"<sup>5</sup>

Un premio ofrecido por la revista *Acta Mathematica*, y dotado de 2 500 coronas por el rey Oscar II de Suecia y Noruega ayudaría a encontrar una nueva ruta para resolver dicho problema. Uno de las preguntas matemáticas formuladas fue la siguiente: "Dado un sistema de

puntos de masa arbitraria que interactúan entre sí de acuerdo a las leyes de Newton, bajo la suposición de que dos puntos nunca colisionan, tratar de encontrar una representación de la coordenada de cada punto como una serie de una variable que sea una función conocida del tiempo y que la serie converja uniformemente para todos sus valores”.

La solución de dicho problema dada por Poincaré ganó el concurso. Este demostró que no existen magnitudes que se conserven y sean analíticas en el momento y la coordenada. De hecho, aunque ganó, no respondió la pregunta formulada. Ni siquiera demostró que no puedan existir soluciones analíticas de dicho problema, lo que demostró es que no existen magnitudes que se conserven y se integren. Desde el punto de vista filosófico Poincaré llegó a conclusiones importantes acerca de la predictibilidad de los sistemas dinámicos; en su libro *Ciencia y Método* escribió: *"incluso si las leyes naturales no tuvieran secretos para nosotros, sólo podríamos conocerlas de manera aproximada. Si esto nos permite predecir la situación siguiente con igual exactitud, esto es todo lo que necesitamos y podemos decir que el fenómeno ha sido predicho, que es gobernado por leyes. Pero no siempre es así: puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan grandes diferencias en el fenómeno final"*<sup>6</sup>.

Un segundo problema que llevó a la consideración del caos dinámico, fue la hipótesis ergódica de Boltzmann. Para poder calcular sus promedios en la mecánica estadística, Boltzmann tuvo que hacer una suposición fuerte: considerar que el promedio por los estados posibles es igual al promedio en el tiempo. O dicho de otra forma, que el sistema ocupará por igual tiempo todos los estados del sistema permitidos por las leyes de conservación. Poincaré reformuló esta idea, diciendo que el sistema se acercará tanto cuanto se desee a cualquier punto del espacio de fases. Probar la hipótesis ergódica se convirtió en un problema muy serio. Las líneas de investigación fueron dos: Una de ellas se dedicó a estudiar la topología del espacio de fases al considerar los sistemas como una transformación en si mismos de espacios con medida. El concepto de entropía topológica introducido por Kolmogorov como la razón de cambio del número de trayectorias accesibles por el sistema permitió clasificar los sistemas físicos bajo estudio por la topología de su espacio de fases.

Por otra parte se comenzó la búsqueda de sistemas ergódicos. Un sistema ergódico no puede tener órbitas estables ya que en principio perdería su ergodicidad. El estudio del movimiento de bolas de billar en espacios de curvatura negativa introdujo un sistema que produciría resultados de largo alcance al introducir Birkhoff y Morse la dinámica simbólica para estudiar las órbitas posibles<sup>7</sup>.

De la colaboración entre Steven Smale y un grupo de matemáticos soviéticos surgió en el año 1967 un artículo titulado "Sistemas dinámicos diferenciables"<sup>7</sup>. En dicho trabajo se traza una estrategia para pasar de una ecuación

diferencial local a la descripción topológica global del espacio de fases del sistema dinámico.

Por último es importante mencionar el antecedente de los trabajos de Lord Rayleigh en el estudio de los instrumentos musicales. Para poder reproducir características básicas de dichos instrumentos, como la generación de más de un tono, hubo de introducir modelos realistas de un sistema masa - resorte más fricción, provocando la aparición de no linealidad.

Lo sorprendente es que a principios del siglo pasado estas ideas estaban rondando la mente de muchos físicos y matemáticos, sin embargo no hubo un desarrollo claro de la teoría física, si exceptuamos los estudios de Birkhoff. Al parecer hay dos causas fundamentales para esto. Primero, el curso fundamental de pensamiento se encauzó en la teoría cuántica y en las teorías de la relatividad, al cual se dedicó el mayor número de investigadores. En segundo lugar hay una razón meramente técnica, pero decisiva. Para estudiar de manera eficiente la solución de una ecuación diferencial no lineal hay que hacer un volumen enorme de cálculos numéricos, los cuales son prácticamente irrealizables sin el auxilio de medios de cómputo electrónico, que comenzaron a ponerse al alcance de los investigadores en la década del 60, y se convirtieron en una herramienta común en la década de los 80. Así, el estudio del caos tuvo que esperar largos años, en los cuales sólo hubo avances en las matemáticas.

El artículo "Flujo determinístico no periódico"<sup>8</sup> fue publicado en el año de 1963 por el meteorólogo Edward Lorenz; en él por primera vez se estudió un sistema de ecuaciones diferenciales determinístico con una clara dependencia de las condiciones iniciales. Lorenz comenzó trabajando con un sistema de 12 ecuaciones diferenciales, que él usó para hacer una simulación del tiempo meteorológico, encontrando que una pequeña variación en las condiciones iniciales provoca que en el transcurso del tiempo las trayectorias del objeto se separen de manera drástica, dando lugar a la impredecibilidad del "tiempo meteorológico" simulado por el sistema. Luego Lorenz comenzó a buscar sistemas de ecuaciones de menor dimensión que mostraran esta característica. Su famoso resultado es el sistema de 3 ecuaciones diferenciales que describe la formación de una celda convectiva, y tiene la forma:

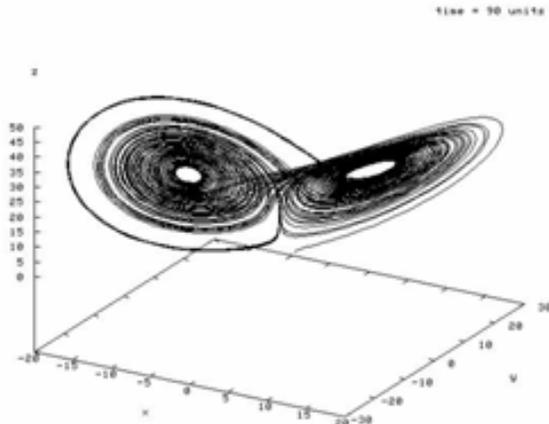
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = xz + \rho x - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

donde  $\mathbf{x}$  es el flujo convectivo,  $y$  la distribución horizontal de temperaturas y  $z$  la distribución en altura. Los parámetros son  $\sigma$ , la viscosidad que se opone a la convección térmica;  $\rho$ , la diferencia de temperatura entre la parte superior e inferior de la celda convectiva y  $\beta$ , la

razón alto ancho de la celda. Son ecuaciones totalmente deterministas, ya que ninguno de los términos tiene carácter estocástico, y son no lineales. En la figura 1 se muestra el comportamiento de  $(x, y, z)$  de dicho sistema.



**Figura 1:** Evolución del atractor de Lorenz para una selección de las condiciones iniciales.

Lo interesante de las ecuaciones es que el comportamiento del sistema depende de manera muy intensa de las condiciones iniciales. En este sentido se introdujo en la ciencia moderna el concepto de caos. También se ha hecho común hablar de "efecto mariposa"<sup>9</sup> refiriéndose a un artículo publicado por Lorenz donde por primera vez se formuló el término.

**2.2 Sistemas Dinámicos.** En un sistema dinámico el Universo es observado como una función del tiempo. Si tenemos información suficiente sobre el estado del sistema en un instante dado, así como de las leyes que lo gobiernan, podremos colegir sobre el futuro de dicho sistema. Eso se aprendió del primer gran sistema dinámico estudiado: el movimiento de los astros en la esfera celeste.

En general, el estado de un sistema dinámico estará determinado por el conocimiento de un número determinado  $d$  de variables, las *variables dinámicas* del sistema (v. gr. posición e impulso). Así, definiendo el *espacio de fases*  $\mathbf{M}$  como un espacio  $d$ -dimensional, donde en cada eje se representa una de las variables dinámicas, el estado del sistema estará representado unívocamente por un punto en dicho espacio. Cualquier cambio en el sistema se reflejará como un cambio en la posición del *punto representativo*  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ . La evolución temporal de dicho punto se denomina *dinámica* del sistema, y la función  $f^t$  que nos dice la posición del punto en el momento  $t$ , *regla de evolución*.

Las reglas de evolución pueden ser determinísticas o estocásticas. En el primer caso la regla está definida unívocamente, mientras que en el segundo hay algún término que cambia de manera impredecible. En lo que sigue estudiaremos sistemas dinámicos determinísticos, en los cuales aparece el caos. Aunque en principio en un

sistema determinístico la regla de evolución toma un punto del espacio de fases y lo convierte exactamente en otro punto, no siempre es esto posible. Las reglas de evolución pueden ser parcialmente desconocidas, como ocurre con los sistemas de predicción del tiempo meteorológico; incluso pueden existir puntos del espacio de fases que no tengan una trayectoria definida. En lo que sigue no tomaremos en cuenta estas excepciones.

Por definición la regla de evolución opera  $f^t : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ , y nos dice dónde se encuentra un punto dado luego de un tiempo  $t$ . Al par  $(\mathbf{M}, f^t)$  se le denomina *sistema dinámico*. Si el tiempo es una variable real (o sea, continua) la evolución del sistema se denomina *flujo*. Si es una variable que evoluciona en saltos discretos en el tiempo (como en una imagen estroboscópica) se habla de un mapa.

Dado un punto  $x_0$  la regla de evolución traza una serie de puntos  $x(t) = f^t(x_0)$ , la llamada *trayectoria a través de  $x_0$* . El subconjunto de  $\mathbf{M}$  que pertenece a la trayectoria de un punto  $x_0$  dado se llama *órbita de  $x_0$* . Para un flujo, una órbita es una curva continua, en un mapa una sucesión de puntos.

En un sistema dinámico existen distintos tipos de trayectorias, siendo las más estudiadas en la mecánica clásica las estacionarias, periódicas y aperiódicas. Las periódicas, caracterizadas por  $f^t(x) = f^{t+T}(x)$ , siendo  $T$  el período, constituyen el núcleo de la Mecánica Clásica, por ser sistemas integrables. Sin embargo, la realidad confirma que para los sistemas dinámicos genéricos, las órbitas periódicas son una excepción: la mayoría son aperiódicas. Dichas órbitas se pueden clasificar en dos tipos. En el primero están aquellas órbitas en las cuales cualquiera sea el entorno abierto alrededor de un punto, la trayectoria no regresa a dicho entorno:

$$(x_0 \in \mathbf{M})(\exists M_0(x, \delta) \subset \mathbf{M}) :$$

$$(f^t(x_0) \notin M_0)(\forall t \geq t_{\min})$$

En este caso  $x$  se denomina punto de escape. Por otra parte, si se cumple

$$(x_0 \in \mathbf{M})(\exists M_0(x_0, \delta) \subset \mathbf{M}) :$$

$$(f^t(x_0) \in M_0)(\text{para algún } t \geq t_{\min})$$

a  $x$  se le denomina recurrencia o punto de no escape. Un punto es recurrente si su órbita retorna un número infinito de veces a un entorno abierto alrededor de él. Se define el *conjunto recurrente*  $\Omega$  como el conjunto de todos los puntos recurrentes del sistema. Este conjunto es básico para la comprensión de su dinámica a largo plazo.

Consideremos ahora la evolución temporal de un conjunto de puntos que inicialmente están conectados entre sí. Si la evolución futura del sistema provoca que dicho conjunto "mapee" en sí mismo, entonces el flujo global se contrae sobre un subconjunto de  $\mathbf{M}$ , el cual recibe el nombre de *atractor*. El conjunto de todos los puntos cuya trayectoria cae en el atractor luego de transcurrido el tiempo se denomina *cuenca de atracción*.

Los atractores pueden ser de distintos tipos. Un péndulo simple con fricción siempre se detendrá en su posición de reposo, por lo que el atractor en dicho caso será un punto. Si no se considera la fricción, repetirá la misma trayectoria de manera interminable, por lo que el atractor en dicho caso será una trayectoria cerrada. En el año 1971 D. Ruelle y F. Takens publicaron un artículo titulado "Acerca de la naturaleza de la turbulencia"<sup>11</sup>, en el cual aparece, definido de manera muy difusa, un nuevo término, que se ha difundido más allá de todo lo imaginable: *atractor extraño*. Lo definieron a través de sus propiedades: un atractor estable, que representara el estado final de un sistema que estuviese sometido a un ambiente ruidoso, con un bajo número de dimensiones, no periódico, que provocara órbitas infinitas en un espacio limitado (o sea, tener propiedades de un fractal... pero aún Mandelbrot no había acuñado el término<sup>12</sup>). Los autores no conocían el trabajo de Lorentz en 1963, donde ya se había estudiado uno de dichos atractores.

La definición precisa de un atractor extraño es complicada, ya que, incluso al hacer cálculos numéricos de órbitas, es difícil separar un atractor extraño de un atractor periódico de período largo. Así que entenderemos por un atractor extraño a un *atractor recurrente aperiódico*. También se acostumbra a definirlo como un conjunto atractor que tenga medida cero en el espacio de fases y que presente dimensión fractal.

Por el contrario, si el conjunto recurrente puede ser rodeado por un volumen conexo del espacio de fases  $M_0$  tal que casi todos los puntos que están en  $M_0$  pero no en  $\Omega$  abandonan  $M_0$ , el conjunto  $\Omega$  se denomina un repulsor. El ejemplo más sencillo de repulsor es el llamado mapa logístico  $y_n = x_n^2$ ;  $x_{n+1} = y_n$ . Con ayuda de una calculadora no es difícil encontrar que los puntos  $x = \pm 1$  resultan repulsores. En efecto, los puntos  $|x| > 1$  tienen una evolución que los va alejando al infinito. Por su parte, aquellos que  $|x| < 1$  evolucionarán acercándose a cero.

Un concepto básico para estudiar los sistemas dinámicos es el de *sección de Poincaré*. Diseñar imágenes de atractores no es fácil, incluso en el caso 3D. Típicamente, las órbitas tuercen sus trayectorias de forma complicada, debido a la reducción del espacio topológico que causa el atractor, creando una figura cuya estructura interna no es visible. Hacer proyecciones de la órbita en un plano introduce artefactos, por ejemplo que las órbitas se crucen repetidamente. Una técnica que revela mejor la estructura interna del atractor es la de diseñar la llamada sección (o superficie) de Poincaré. Esta sección es una hipersuperficie  $P$  de dimensión  $d - 1$ . Si el espacio de fases es 3D, la sección de Poincaré será una superficie 2D. La intersección de una sección de Poincaré con una trayectoria produce un mapa conocido como Mapa de Poincaré:  $P(x) = f^t(x) \cap P$ .

Una forma de especificar el mapa de Poincaré es a

través del tiempo de vuelo, que es la función  $\tau(x)$  que caracteriza el tiempo que tarda el punto representativo en regresar a la sección  $x' = P(x) = f^{\tau(x)}(x)$ .

La definición de la sección de Poincaré se puede especificar implícitamente a través de una función  $U(x)$  que cumpla  $U(x) = 0$  para los puntos de la superficie. En un atractor 3D una forma posible es tomar como función aquella que haga cero una de las coordenadas del sistema. De esta forma se observará la intersección de la órbita con el plano, que para cada evento será un punto. Por lo general se añade la llamada condición de orientación de la superficie, para solo tener en cuenta uno de los encuentros de la órbita con la sección, y eliminar la posibilidad de contactos tangenciales. Esto se puede hacer escogiendo un signo para el producto escalar entre el gradiente de la función y el campo de velocidades de la órbita, por ejemplo positivo:

$$(\vec{v} \cdot \nabla U(x)) = \sum_{j=1}^d v_j(x_n) \partial U_j(x_n) > 0; \quad U(x_n) = 0.$$

En la figura 2 se observa el mapa de Poincaré del movimiento de uno de los átomos de una molécula triatómica de van der Waals. Si se comienza a hacer la amplificación de dicha figura, y aumentar el número de veces que la órbita intercepta a sección, el mapa se hace más detallado, y muestra una rica estructura, con regiones toroidales y otras que muestran una disposición desordenada. De esta forma, aunque se pierde una parte de la información, otra parte adquiere mayor relieve.

**2.3 Cuantificación del caos.** Un sistema determinístico es aquel cuyo estado presente está *en principio* determinado por sus condiciones iniciales, en contraste con un sistema estocástico, para el cual las condiciones iniciales determinan el estado presente sólo de manera parcial, debido al ruido u otras circunstancias externas fuera de control. Así, el estado actual refleja las condiciones iniciales más el ruido que ha encontrado en su historia. Si el ruido es suficientemente intenso, puede que luego de un tiempo de evolución el sistema "olvide" las condiciones iniciales.

Supongamos un sistema dinámico, totalmente determinístico, en el cual dos trayectorias que comiencen muy cerca, a una distancia  $\delta x(0)$  se vayan separando, de forma tal que luego de transcurrido un tiempo  $t$ , se encuentran a una distancia  $\delta x(t) \approx L$  donde  $L$  es la extensión lineal del sistema completo (figura 3). Esta dependencia de las condiciones iniciales se puede cuantificar a través de la expresión

$$|\delta x(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta x(0)|$$

donde  $\lambda$  representa la velocidad media de separación de las órbitas y se conoce como *exponente de Lyapunov*. Su definición es:

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \delta x(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|}$$

Así los valores de  $\lambda$  determinan el comportamiento del sistema de la siguiente forma:

$\lambda < 0$ . Las órbitas son atraídas a un punto fijo estable o a una órbita periódica estable. Estos valores son característicos de sistemas disipativos (como el péndulo amortiguado).

$\lambda = 0$ . Valor típico de los sistemas físicos conservativos. Las órbitas se mantienen a una distancia fija entre sí. Por ejemplo el diagrama de fases de dos péndulos de igual frecuencia y diferente amplitud, sin disipación.

$\lambda > 0$ . Las órbitas son inestables. Los puntos, no importa cuán cercanos estén inicialmente divergirán a cualquier separación arbitraria, y todos los puntos del espacio de fases serán visitados.

En este último caso, para cualquier exactitud finita de los datos iniciales  $|\delta x(0)| = \delta x$  (o consecuentemente, para dos puntos separados dicha distancia), la dinámica del sistema será predecible sólo durante un tiempo finito llamado *tiempo de Lyapunov*, dado aproximadamente por:

$$T_L \approx -\frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\delta x}{L} \right|$$

Esta es la primera condición necesaria para la aparición del caos, pero no es suficiente. En última instancia si las órbitas se alejaban indefinidamente, el sistema iría perdiendo sus contornos sin conducir a un comportamiento interesante. Es además necesario que exista la mezcla de las órbitas entre sí, su recurrencia en una región del espacio. Esto es, aunque las órbitas se separan localmente, la dinámica del sistema esta confinada a una región finita del espacio de fases, de forma tal que trayectorias separadas se re encontrarán un número infinito de veces en el futuro del sistema.

Para caracterizar la propiedad del espacio de fases de contener un número de órbitas topológicamente diferentes se introdujo el concepto de entropía topológica. Esta entropía mide la razón de incremento del número de órbitas al aumentar la longitud de éstas. Dicha entropía está relacionada con el incremento del número de órbitas periódicas según la expresión

$$N(n) \propto e^{hn}$$

donde  $n$  es la longitud de la órbita y  $h$  es la entropía topológica. El término entropía está asociado con que el número de órbitas nos define el número de particiones que se puede hacer del espacio de fases.

Otra magnitud que nos indica que estamos en presencia de un sistema caótico es un espacio de fases con estructura fractal, esto es, con autosimilitud e invarianza de escala.

**2.4 Definición de caos.** Hemos estado hablando de caos sin hacer ninguna definición precisa del término. Quizás la causa es que no hay en la literatura dos definiciones que sean coincidentes, aunque todas tengan elementos comunes. Hemos visto características cuantitativas que debe cumplir el sistema:

- a) Exponentes de Lyapunov positivos,
- b) Entropía topológica positiva.
- c) Estructura y dimensión fractal en el espacio de fases.

Estas características son asintóticas, por lo que en un sistema concreto será muy difícil precisar si las posee. En cualquier caso en un sistema que presente caos estarán presentes también las siguientes características globales:

1-Determinismo: Las ecuaciones que describen los sistemas donde aparece el caos clásico no deben tener elementos aleatorios.

2-No linealidad: Los sistemas que presentan caos son no lineales, al menos débilmente.

3-Dependencia sensible a las condiciones iniciales: Esta característica se revela cuando analizamos el comportamiento de las trayectorias dentro de un atractor, ya que si observamos el atractor como un todo, en última instancia todas las órbitas que pasan por la cuenca de atracción caen en él.

4-Aperiodicidad: Las órbitas de los sistemas caóticos son aperiódicas, aunque en el sistema pueden existir (y de hecho por lo general existen) órbitas periódicas, que son muy importantes para calcular algunos parámetros del sistema.

5-Estabilidad global: Aunque el movimiento de los puntos en el espacio es localmente inestable, los sistemas físicos que se estudian deben tener determinada estabilidad durante un tiempo dado para poder ser estudiados.

De todas formas esta no es una definición, es a lo sumo una enumeración de características que deben cumplir los sistemas caóticos. La siguiente definición es de autoría del filósofo chino Huajue Liu (Universidad de Beijing) y dice:

*El movimiento caótico es un comportamiento recurrente, aperiódico, generado a partir de una ecuación determinística no lineal con dependencia sensible a las condiciones iniciales.*

¿Cuándo debemos tener en cuenta el caos? Un sistema de muchos cuerpos como el sistema solar en principio admite soluciones caóticas, sin embargo, la predicción de los eclipses, las posiciones de los planetas e incluso de sus satélites se hace sin ningún problema. El concepto de tiempo de Lyapunov, esto es, el tiempo que demora una región del espacio de fases con dimensiones similares a la precisión de la observación, en alcanzar todo el espacio de fases accesible, nos ayuda a discernir cuándo usar dichas ideas. Si el tiempo de observación del sistema es mayor que el tiempo de Lyapunov, entonces es obligado tener en cuenta el carácter caótico del sistema. Así, la teoría tiene amplio uso en cuestiones de mecánica estadística, en sistemas cuánticos y en cuestiones de estabilidad a largo plazo en mecánica celeste (en este caso el tiempo de Lyapunov es enorme al compararlo con la edad del sistema solar).

¿Cómo enfrentar un problema que involucre un sistema caótico?

Ante todo se debe olvidar el paradigma de determina-

ción de las posibles trayectorias del sistema en el espacio de fases: como ya vimos en un sistema con caos sólo podremos conocer éstas en un intervalo de tiempo limitado; la evolución a largo plazo es imposible de predecir. Así, la esencia del método se traslada a la descripción analítica de las características de las órbitas posibles, para con ellas poder calcular promedios sobre el espacio.

La línea global de ataque ha de ser:

1- Determinación de la dimensión intrínseca del sistema. Esto es, se determina el número mínimo de coordenadas que son necesarias para caracterizar la dinámica. Si estas dimensiones son muchas, es poco lo que puede hacer la teoría en su estado actual. Sin embargo hay sistemas con muchos grados de libertad, incluso infinitos (por ejemplo el frente de expansión de una llama) que tiene un número limitado de grados de libertad caóticos. En este caso la dinámica caótica está reducida a un número bajo de grados de libertad y puede ser estudiada.

2- Se cuentan y clasifican todas las órbitas topológicamente distintas dentro de un patrón de jerarquías, caracterizadas por su longitud. Las órbitas periódicas que se encuentren son el espinazo sobre el cual se montarán los cálculos, por lo tanto tienen gran importancia.

3- Se calculan las magnitudes del sistema a partir de un formalismo similar al de las funciones de partición de la Física Estadística.

### 3 Conclusiones

La teoría del caos, como ya dijimos, es altamente popular, y muchas veces se usa metafóricamente en campos alejados de su esfera usual. Otras veces las metáforas se toman como hechos establecidos. Como ya vimos, el caos tiene características cuantitativas que permiten detectarlo, y un comportamiento general que, según la definición antes expuesta, permiten caracterizar un sis-

tema que lo presente.

Hasta el momento, la teoría es sólo aplicable a sistemas con un número bajo de dimensiones intrínsecas. Además, la dificultad en separar la dinámica asociada con el caos de la provocada por el ruido ha hecho difícil aplicar la teoría en las ciencias de la vida y la economía, aunque en los últimos tiempos se han obtenido avances significativos. En las ciencias de la conducta los resultados alcanzados han sido realmente pobres.

### Referencias

1. T. S. Kuhn. The structure of scientific revolutions, 2nd edition. The University of Chicago Press. Chicago (1970).
2. T-Y. Li, J. Yorke. Period three implies chaos. American Mathematical Monthly, 82 (1975) 985.
3. Pierre Simone de Laplace. Essai philosophique sur les probabilités. 2da ed. Paris 1814.
4. G. W. Leibnitz. Von dem Verhängnisse. En "Obras completas en 4 tomos". Tomo I. Ed. Misl. Moscú (1980).
5. J. C. Maxwell. Teaching Nonlinear Phenomena- I, (1873) 47.
6. H. Poincaré, Ciencia y método. Balsa Editores, Morelia. (1978).
7. S. Smale, Differentiable dynamical systems. Bulletin Am. Math. Soc. (1967) 747.
8. E. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. J. Atmospheric Sci. 20 (1963) 130.
9. E. Lorenz, Predictability: Does the flap of a butterfly wings in Brazil set off a tornado in Texas? Comunicación a la Convención de la American Association for the Advancement of Science. Washington. Dec 29th (1979).
10. P. Cvitanovic et al. Classical and Quantum Chaos. <http://chaosbook.com>
11. D. Ruelle, F. Takens. On the nature of turbulence. Communications in Mathematical Physics. 20 (1971) 167.
12. B. Mandelbrot. Los objetos fractales. Tusquets Editores. Barcelona 4ta ed. (1996).

## Activity in ant colonies

C. Noda, J. Fernández. C. Pérez-Penichet, E. Atshuler

Facultad de Física, Universidad de La Habana, Cuba; Cátedra de Sistemas Complejos: “Henri Poincaré”;  
noda@complexperiments.net†, javier@complexperiments.net, cpp@complexperiments.net, ea@infomed.sld.cu.

Recibido el 15/05/2007. Aprobado en versión final el 15/06/2007.

**Sumario.** Los insectos sociales, y las hormigas en particular, son un ejemplo recurrente de optimización, basado en la autorganización. A pesar de la simplicidad de cada individuo, la colonia presenta inteligencia colectiva: la organización de las filas de hormigas para buscar comida es un ejemplo de ello. Pero la observación directa no es suficiente para recolectar la cantidad de datos necesarios para entender la autorganización de las colonias en su medio natural. Aquí presentamos un sistema de medición para monitorear la actividad de la colonia de forma continua y con alta sensibilidad. El rol protagónico corresponde a un sensor de actividad infrarrojo diseñado específicamente para medir actividad de las hormigas a través de la boca del nido, aunque son utilizados otros sensores para medir temperatura e iluminación. Se estudian las características del sensor de actividad y su comportamiento en el terreno y, finalmente, se presentan las mediciones en una boca de un nido de *Atta Insularis*, una hormiga endémica de Cuba, para ilustrar el potencial de nuestro sistema de medición.

**Abstract.** Ants, as paradigm of social insects, have become a recurrent example of efficient problem solvers via self-organization. In spite of the simple behaviour of each individual, the colony as a whole displays “swarm intelligence:” the organization of ant trails for foraging is a typical output of it. But conventional techniques of observation can hardly record the amount of data needed to get a detailed understanding of self-organization of ant swarms in the wild. Here we are presenting a measurement system intended to monitor ant activity in the field comprising massive data acquisition and high sensitivity. A central role is played by an infrared sensor devised specifically to monitor relevant parameters to the activity of ants through the exits of the nest, although other sensors detecting temperature and luminosity are added to the system. We study the characteristics of the activity sensor and its performance in the field. Finally, we present data measured at one exit of a nest of *Atta insularis*, an ant endemic to Cuba, to illustrate the potential of our system.

**Keywords:** Social Insects 87.23.Ge, Complexity 89.75.-k, Instrumentation 87.61.Ff, Sensors 07.07.Df.

### 1 Introduction

Social insects have become a paradigm to describe a number of properties of complex systems, such as self-organization<sup>1</sup>: in spite of the extremely simple behavior of each individual, an ant colony as a whole exhibits amazing properties ranging from activity oscillations<sup>2</sup> to optimization in foraging trails<sup>3,4</sup>. Moreover, such “swarm intelligence” is being seriously considered by engineers as a model to design “herds of robots”<sup>5</sup>.

However, conventional biological techniques—mainly direct visual observation—still dominate the measurement of insect activity in the wild. In the last decades, other approaches such as quantitative image analysis have been applied only in controlled laboratory conditions<sup>6</sup>.

In this article, we report the design, construction, and test of a data collecting system, including an infrared sensor to quantify the activity of ant nests at their entries/exits, during prolonged periods of time.

## 2 System Description

At the core of our data acquisition system is the simple network application platform SNAP<sup>TM</sup> from Imsys AB (<http://www.imsys.se>), an open JAVA reference platform based on the Cjip microprocessor for Networked, JAVA-based control, running at 66 Mhz. The SNAP module includes several hardware input-output I/O options. We use the 1-Wire<sup>TM</sup> net (<http://www.maximic.com/AN1796>) as a convenient interface to our sensors.

It is intended to collect data in the field in an uninterrupted fashion. It collects a data stream from the sensors, wired across the field, processes it, and later transfers it to a server in campus using a wireless fidelity Wi-Fi network. The small power requirements of the system permit to operate it, for over 30 h, off a 12 V – 7 Ah lead-acid cell. In the experiments we reported here, it is powered from the grid and the battery remained as a backup.

Our in-field system collects, filters, and aggregates a datastream from the ant nest sensors and then uploads it to the server. The output file contains information about local temperature distribution, daylight intensity, and activity at the nests exits, along with a time stamp for every sample taken.

Activity in this case is defined as the number of counts the sensor generates when ants enter or leave the nest during a given time interval. For the experiments made so far, the time resolution was set to 2 samples/min.

Over ten sensor nodes could be easily deployed in the field. Typical required lengths to cover the entries of one nest extended up to a few tens of meters.

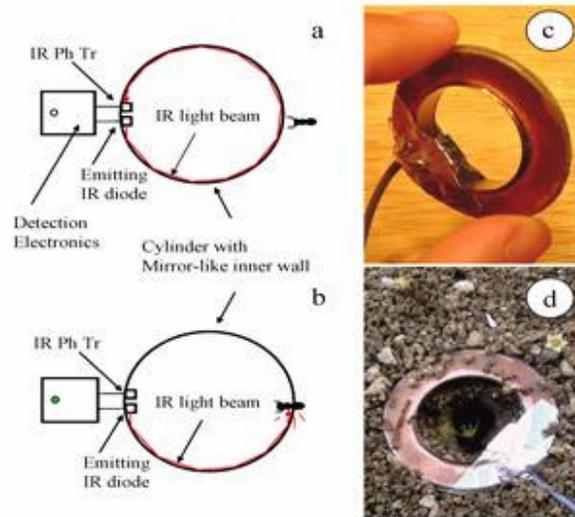
## 3 Activity Sensor

In order to measure the ant activity at nest entries—our fundamental parameter—we have devised an ad hoc infrared sensor. The principle of the activity sensor is very simple yet effective. A light beam is reflected in the inner surface of a cylindrical mirror build from a thin metallic band. The reflective band is open at one point where a tiny IR lightemitting diode LED and phototransistor are stacked back to back and positioned close to the mirror surface. Thus the light beam experiences multiple reflections confined within a radial distance of 1 – 2 mm above the inner surface of the mirror, only interrupted by trespassing ants.

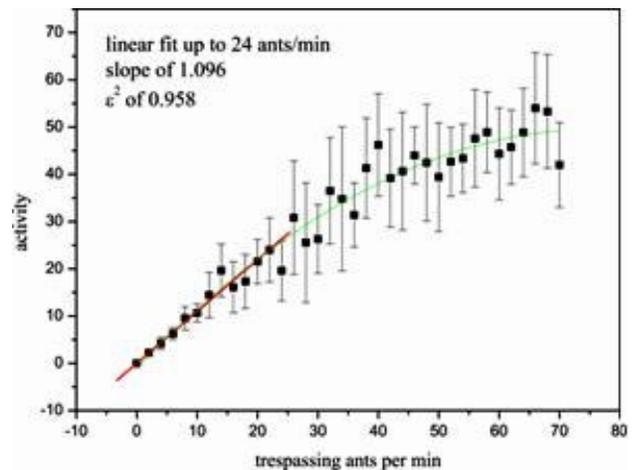
Special care is required during the installation to maximize the fraction of light that reaches the phototransistor. Figures 1 a and 1 b show diagrams that illustrate the functioning of the sensor. The diameters of the mirrors were chosen so that the assembly can fit conveniently, given different sizes of nest entries in the range of 10–25 mm.

Very low power and low noise analog electronics has been used for conditioning the signal and detecting the

changes of intensity in the reflected beam arriving at the phototransistor due to the ants interrupting the infrared light ring. In order to isolate the signal level shifts produced by the trespassing ants, from those created by the environment light changes, a filter has been implemented. We exploit the temporal differences of these events and compare a voltage, proportional to the intensity of the reflected beam, to a low pass filtered sample of the same signal. The last one accounts mostly for the dynamic threshold imposed by the infrared component of the daylight biasing the phototransistor. The filter was tuned resulting in a time constant of about 10 s.



**Figure 1.** Diagram showing the functioning of the sensor. (a) and (b) illustrate the functioning principle, (c) and (d) show the sensor in the lab and in the field, installed in a nest.



**Figure 2.** Graph showing the dependence of the activity measured by the sensor and the observed traffic density at the nest entry as it was recorded in the video.

When ants enter the nest, they step through the 4 mm wide metal band and the thin light curtain over this mirror is interrupted, which leads the comparator to trigger the counter. Figures 1 c and 1 d show pictures of the sensor in the laboratory and installed on a nest exit, re-

spectively.

To our surprise, ants consistently show undisturbed by the presence of the setup. However, due to the overlapping of ants trespassing the entry which happens often beyond certain traffic density, one can expect missing ants in the counting and therefore a nonlinear performance of the activity sensor.

In order to characterize this effect, we have calibrated the sensor by videotaping it, carefully quantifying real activity from the resulting images, and then comparing it with the activity given by the sensor. The video was made with the sensor installed at several nest entries, with different traffic levels, while the system was performing a time-synchronized measurement. Then we watched the video with great care and counted ants entering the nest at regular time intervals, obtaining a variety of traffic density values that span from null when the activity is very poor to over 60 ants/min (when the activity is well organized and intense, typically very late at night).

Confronting this result with the simultaneous measurement carried out by the system, we analyze the non-linearity of the sensor and its accuracy and establish the range of traffic densities for which it remains accurate. We have found that the sensor remains linear up to traffic levels of more than 20 ants/min. Ants' activity was plotted versus the number of trespassing ants as shown in Fig. 2.

It is interesting to notice the larger the traffic, the greater the uncertainty of the measurement. This is indeed related to the increase of the probability that the sensor double counts a "struggling" ant at the entry point, carrying a piece of a leaf, or it might miss several ants entering or exiting simultaneously.

## 4 Measurements

*Atta insularis* common name bibijaguas, a leaf cutter endemic to Cuba, has been chosen for the preliminary study we are presenting as a field test of our system. Each individual measures from 3 to 9 mm in length. Experiments for the probe of concept took place at the park "Quinta de los Molinos" in Havana, where there is a sizable population of bibijaguas. A good nest entry with abundant flow was chosen to install the sensor. Figure 3 shows a typical run of the experiment at one exit of a nest. Temperature upper panel and accumulated activity lower panel are presented as a function of time, within a period of nearly two weeks.

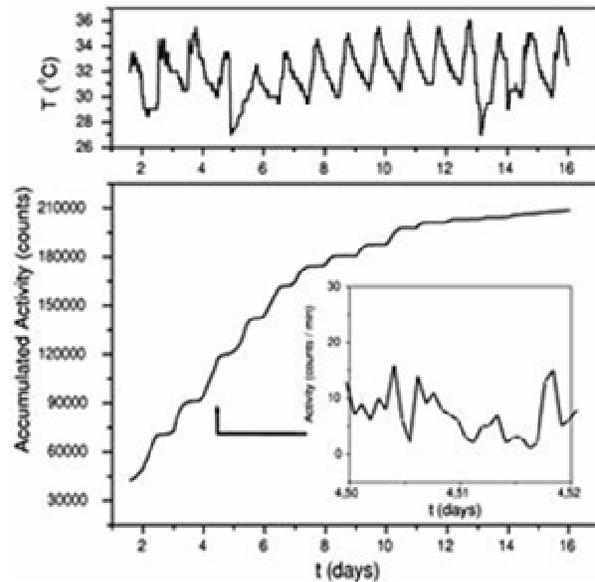
The high resolution of the activity graph—which comprises more than 20 000 experimental points—becomes evident in the inset of the lower panel, which contains approximately half an hour of activity.

Although the full activity range present in our measurements exceeds the linear zone of the sensor, the most relevant parts of it remain well below the nonlinear threshold. In normal conditions, the activity of a nest is typically periodic, with a very high, steady activity during

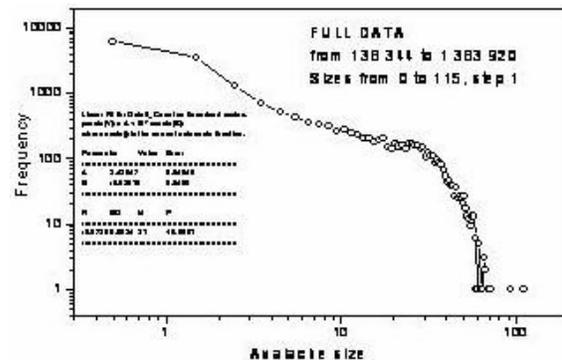
night hours and nearly zero activity during daytime. The most interesting intervals are, however, those where this steady activity "builds up" and where it "slows down." These data subsets provide the valuable information on how the nest self-organizes and their global integrity and accuracy are not compromised by any of the above effects.

Some global features of ants activity immediately become apparent. One is the correlation between temperature and activity cycles, with a period of approximately 24 h: as the temperature starts to decrease each day, the activity starts to increase.

A second observation is the net decrease in the use of the door under study as days pass by, due to "long-term" self-organization process probably modulated by availability of food. While the general features of this pattern are well known, our data probes them with an unprecedented level of detail, to our knowledge.



**Figure 3.** Datasets from a typical run of the experiment. The upper panel shows temperature near the nest exit and the lower panel reports cumulative activity.



**Figure 4.** Activity burst size distribution. An avalanche is considered as the number of ants moving within a measurement interval of 1 minute.

It allows, for example, the calculation of the statistical distribution of activity variations, shown in Fig. 4. Notice that, although one decade of linear behaviour in the avalanche size is not enough to consider a power law distribution, some basic arrangements of the avalanche time scale would drastically affect this. For example, choosing a bigger time windows in which one observes an avalanches will lead to an extended range of avalanches sizes. We will study this in more detail as more data becomes available.

## 5 Conclusions

We have described our system to measure ant activity and shown the infrared activity sensor performance in the field. We are able to collect massive data from ant activity in the nest along with other relevant magnitudes like temperature and daylight intensity.

As a future prospect, we plan to deploy activity sensors at different exits of the same nest and, given the temporal series of activity, calculate correlation functions among them, in order to penetrate further in the details of the self organization mechanisms of the ant society.

## Acknowledgements

The authors acknowledge support from the “Abdus Salam” ICTP and the Physics Department, University of Oslo, in the final stage of this project. The authors also acknowledge support from the Cuban PNCT Grant entitled “Avalanche dynamics in Physical and Biological Systems.”

## References

1. R. Badii, *Complexity: Hierarchical Structures and Scaling in Physics*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
2. R. V. Sole, O. Miramontes, and B. C. Goodwin, *J. Theor. Biol.* 161, 343 (1993).
3. F. R. Adler and D. M. Gordon, *Am. Nat.* 162, 529 (2003).
4. D. E. Jackson, M. Holcombe, and F. L. Ratkiens, *Nature London* 432, 907 (2004).
5. E. Bonabeau, M. Dorigo, and G. Theraulaz, *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems* (Oxford University Press, New York, 1999).
6. N. R. Franks and S. Bryant, in *Chemistry and Biology of Social Insects*, (edited by J. Eder and H. Rembold Peperny, Munich, p. 122 1990).

## Morfogénesis de patrones formados por electrodeposición

E. J. Suárez-Domínguez<sup>a,†</sup>, E. Izquierdo-Kulich<sup>b</sup>, E. Tejera<sup>c</sup>, J.A. Llanos-Pérez<sup>a</sup>, L.I. Ledesma-Fosados<sup>a</sup>, J. A. Betancourt-Mar<sup>a</sup>, R. Quintana<sup>c</sup> y J. M. Nieto-Villar<sup>c,d</sup>

a) Laboratorio UNE-SAS, Universidad del Noreste, Tampico, México, ejonsd@yahoo.co.uk

b) Dpto. de Ing. Química. Fac. de Ing. Química, Inst. Superior Politécnico ISPJAE; elena@quimica.cujae.edu.cu †

c) Dpto. de Química-Física, Fac. de Química, Universidad de La Habana, nieto@fq.uh.cu;

d) Cátedra de Sistemas Complejos *H. Poincaré*, Universidad de La Habana, Cuba

†autor para la correspondencia

Recibido el 1/2/2007. Aprobado en versión final el 1/5/2007.

**Sumario.** Se realizó un estudio de la dinámica de formación de patrones de zinc formados por electrodeposición a dos valores de corriente constante (3,0 y 10,3 mA). Los resultados experimentales mostraron que la dimensión fractal oscila de forma amortiguada y tiende a un valor constante de  $D_0 \cong 1.7$ . Un comportamiento semejante fue obtenido mediante la simulación del proceso utilizando el modelo DLA (Diffusion Limited Aggregation). Se propone un modelo mesoscópico para describir la formación de los patrones, y a partir del cual se deduce una ecuación discreta que predice el comportamiento oscilatorio de la dimensión fractal y que la misma converge a un valor aproximado de 1,6667. El formalismo estocástico desarrollado permite comprender mejor la morfogénesis de la formación de los patrones. Los resultados obtenidos apoyan la hipótesis de que la complejidad observada en los patrones se encuentra relacionada con la naturaleza multifractal de estos.

**Abstract.** It was made an analysis of the pattern dynamics of zinc electrodeposition at two constant current values (3,0 and 10,3 mA). The experimental results show damped oscillations in fractal dimension that converge to a constant value of  $D_0 \cong 1.7$ . In fact, we found a similar phenomenology in a simulated DLA (Diffusion Limited Aggregation) growth process. The mesoscopic model proposed allows us to get a better insight of the pattern formation dynamic morphogenesis. In this sense, this stochastic formalism makes possible not only to reproduce but also to understand the observed physical complexity. An important characteristic of the formalism developed here is that a discrete equation is obtained. This equation allows us to reproduce the phenomenological results obtained. These results support the hypothesis that the observed complexity of patterns is related with its multifractal nature.

**Palabras clave.** Morphogenesis 87.18.La, Patter formation 89.75.Kd, Electrodeposition 81.15.Pq

### 1 Introducción

Los sistemas biológicos exhiben bellas y diversas estructuras en formas, tamaños, colores etc. Por ejemplo, los cultivos formados por la bacteria *Bacillus subtilis*<sup>1</sup>, exhiben diferentes morfologías, en dependencia de las condiciones del medio de crecimiento, que van desde estructuras densas a estructuras ramificadas de tipo dendríticas.

La existencia de estructuras ordenadas no es única de los sistemas biológicos, sino que se presentan además en diferentes sistemas tales como mezclas de fluidos<sup>2</sup> (*Hele-Shaw flow*), en determinados sistemas químicos<sup>3</sup> (reacción de Belousov-Zhabotinsky), en las dunas del desierto etc.

La dinámica no-lineal constituye la base teórica y la herramienta práctica para la explicación de la complejidad que exhiben estas estructuras ordenadas<sup>4</sup>, donde su

formación es el resultado de la acción colectiva de cada uno de una de sus partes o entidades que la conforman.

Estas estructuras ordenadas o patrones, son el resultado de la auto-organización espacio-temporal, del sistema lejos del equilibrio termodinámico<sup>5</sup>, y se producen como consecuencia de la naturaleza no-lineal de las interacciones de la colectividad y de los procesos de retroalimentación (*feedback*) internos. El origen de los patrones nos conduce a la búsqueda de los mecanismos morfogenéticos de los mismos.

El trabajo seminal de Turing en 1952<sup>6</sup> establece como bases de la morfogénesis que, la emergencia de los patrones en la naturaleza es debida a la aparición de una bifurcación la cual conduce al rompimiento de la simetría y que está asociada con el acoplamiento de mecanismos del tipo *reacción-difusión*.

Estos patrones tienen una característica común relacionada con su geométrica, la cual tiene naturaleza fractal<sup>7</sup>. En 1984 Matsushita y col.<sup>8</sup> estudiaron la morfología dendrítica que exhibían los patrones de zinc obtenidos por electrodeposición. Este tipo de patrones pueden ser obtenidos mediante la electrólisis de soluciones de  $ZnSO_4$  a diferentes concentraciones. El proceso tiene lugar entre dos placas de cristal o acrílico de diferentes espesores, separadas a distancias pequeñas y utilizando electrodos de oro o platino, de tal forma que estos no reaccionen durante el proceso ni interfieran de una forma u otra en el mecanismo de electrodeposición del zinc<sup>9</sup>.

La morfología de los patrones puede modificarse de diferentes maneras: añadiendo un electrolito soporte, modificando las dimensiones de las celdas, cambiando las concentraciones, el voltaje y la corriente eléctrica<sup>10</sup> o variando la velocidad de electrodeposición. Una de las opciones para variar la velocidad de electrodeposición consiste en modificar la corriente eléctrica cambiando la distancia entre los electrodos, donde la corriente disminuye cuando esta distancia se incrementa y viceversa.

Argould y col.<sup>11</sup> en 1993, realizaron mediciones del potencial de la celda en el tiempo y encontraron, evidencias experimentales de la existencia de caos tipo *homoclínico* durante el proceso de electrodeposición de zinc. En 1997 Fleury<sup>12</sup> aportó una nueva evidencia sobre el carácter oscilatorio de la formación de patrones, durante el proceso de nucleación, donde el tamaño del grano después de un evento de nucleación define un ruido geométrico que conlleva a la pérdida de estabilidad de la interfase.

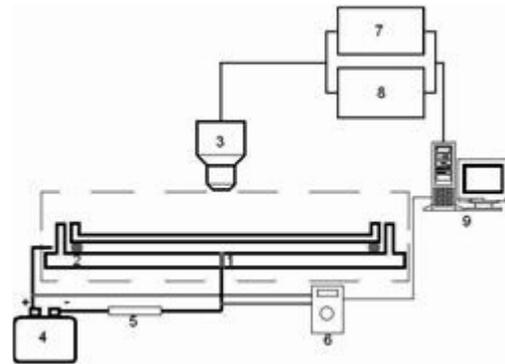
Recientemente Wang y col.<sup>13</sup>, contrario a lo hallado por Argould y col.<sup>11</sup>, encontraron oscilaciones periódicas del potencial de la celda, las cuales atribuyeron a la alternancia entre los procesos de deposición de zinc y de hidróxido de zinc, respectivamente.

En 1981 Witten and Sander<sup>14</sup> introdujeron un modelo físico, agregación limitada por difusión, DLA (Difusión Limited Aggregation) que simula el crecimiento fractal. El modelo DLA se ha empleado para simular el crecimiento de patrones en una diversidad de procesos<sup>15</sup>, debido a su simplicidad, aunque su limitación fundamental es que no explica la naturaleza fractal de los patrones<sup>16</sup>.

El proceso de electrodeposición representa *per se* un modelo de experimentación ideal para indagar sobre el origen de la complejidad que exhiben los patrones naturales. En este trabajo el objetivo que se persigue es profundizar en las bases morfogenéticas de los patrones formados por electrodeposición en dos dimensiones. El mismo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se describe el método experimental empleado, en la sección 3 se reportan los resultados observados y se comparan con los que se predicen por el modelo DLA, en la sección 4 se desarrolla un formalismo para la obtención de un modelo mesoscópico con objeto de buscar una explicación teórica a las fluctuaciones observadas en la dinámica de crecimiento de los patrones y finalmente, en la sección 5, se presentan las conclusiones.

## 2 Parte experimental y descripción del Experimento

**A. Sistema.** El sistema utilizado para generar los patrones por electrodeposición se muestra esquemáticamente en la figura 1. La celda está formada por una placa Petri cubierta con una placa de polietileno y se usaron electrodos de platino 0.44 mm de diámetro; el cátodo se encuentra por el centro introducido en la parte inferior y el ánodo de forma circular de diámetro igual a 88 mm.



**Figura 1.** Esquema de la celda empleada utilizada para el experimento. En la celda el cátodo (1) es colocado por la parte inferior de la misma y el ánodo (2) de forma circular ( $\phi=88$  mm) es colocado entre las dos placas (parte punteada), (3) microscopio, (4) fuente de poder, (5) resistencia mayor a la resistencia de la celda, (6) multímetro, (7) registro de imagen, (8) captura de video y (9) ordenador.

Para la electrodeposición se utilizaron 5 y 10 mL de solución 0.1 M de  $ZnSO_4$  y los experimentos se realizaron a corriente constante, 3 mA y 10.3 mA, utilizando "luz fluorescente" para iluminar los patrones a temperatura constante e igual a 25°C. La variación del potencial de la celda en el tiempo se registró con un Multímetro digital Steren MUL-500 con interfase a la computadora.

**B. Crecimiento de los patrones.** Los crecimientos de los patrones se realizaron a un tiempo máximo de electrodeposición de 390 segundos y las imágenes se captu-

raron cada 30 segundos con una cámara Samsung Digi-max con su mayor resolución y se empleó un microscopio marca Zeigen a 10 ampliaciones (ver Figuras 2 y 3). Los experimentos se repitieron por triplicado.

Las imágenes obtenidas del crecimiento se llevaron a blanco y negro con ayuda del programa ImageJ 1.36b (<http://rsb.info.nih.gov/ij/>).

La dimensión fractal  $D_0$  de los patrones se determinó por el método del conteo de cajas<sup>17</sup> (box counting), el algoritmo fue optimizado y se programó en Delphi 7.

### 3 Dinámica de la formación de patrones

A pesar de que la literatura, sobre el tema de la formación de patrones por electrodeposición, exhibe puntos de vistas diferentes en relación con el origen y tipo de oscilaciones, se evidencia no obstante la existencia de procesos de auto-organización espacio-temporal. Con el objetivo de conocer la dinámica fenomenológica de la formación de patrones, se determinó la dimensión fractal  $D_0$  de los mismos en el tiempo. Esto permitió una parametrización precisa de la complejidad de los patrones formados, lo cual es equivalente a “congelar” la dinámica en el tiempo.

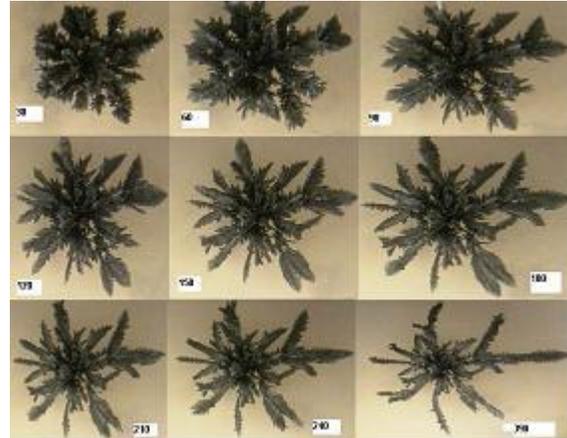
Tal y como se muestra en la figura 4, se observan oscilaciones en la dimensión fractal de los patrones que se amortiguan en el tiempo y que tienden a un valor constante de  $D_0 \cong 1.7$ , independientemente del valor de corriente aplicado, lo cual sugiere un comportamiento fenomenológico general e independiente de las características particulares de cómo se lleve a cabo el experimento. Por otra parte, esto complementa lo encontrado por Fleury<sup>12</sup> en relación a las oscilaciones observadas durante en la etapa de nucleación en la formación de los patrones y apoya las evidencias experimentales con relación a la naturaleza multifractal de los patrones formados por electrodeposición<sup>15</sup>.

Para tener un complemento adicional en relación a la fenomenología observada se generaron patrones utilizando el modelo DLA (ver figura 5). De forma análoga se determinó la  $D_0$  de los mismos en el tiempo. Según se muestra en la figura 6 se observa, independientemente de los detalles, oscilaciones temporales que se amortiguan y convergen a un valor constante de de  $D_0 \cong 1.7$ , valor este, que coincide con lo ya reportado en la literatura<sup>15</sup>.

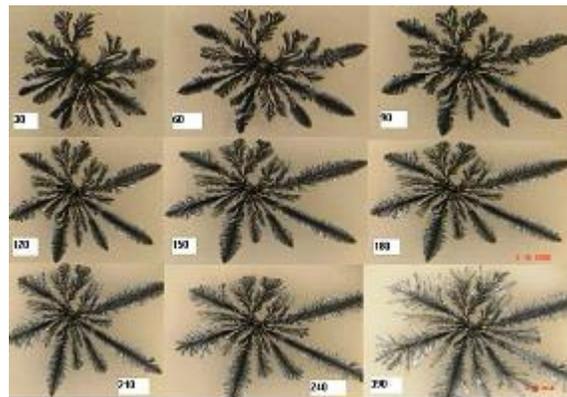
Estos resultados apoyan que, en la formación de los patrones por electrodeposición e independientemente de las particularidades del experimento, el proceso esta gobernado por una dinámica compleja lo que evidencia la auto-organización espacio-temporal lejos del equilibrio termodinámico. En otras palabras, este fenómeno, está gobernado por las bifurcaciones, de ahí el rol que puedan desempeñar las fluctuaciones durante el crecimiento de los mismos.

Según se muestra en las Figuras 2 y 3, a medida que transcurre el tiempo va creciendo el número de ramificaciones de los patrones. De ahí que un tratamiento estocástico ayudaría a esclarecer las bases morfogénicas de

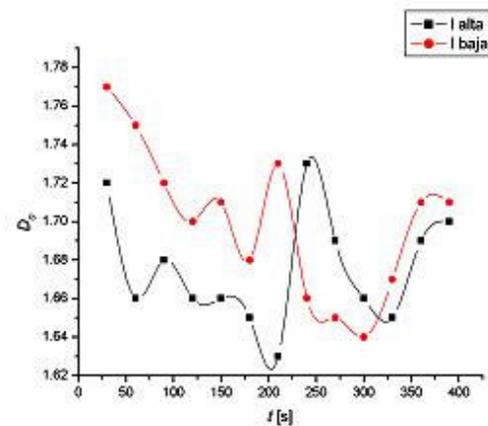
la formación de los patrones.



**Figura 2.** Patrones obtenidos por electrodeposición a diferentes tiempos a corriente constante igual a 10.3 mA y a la temperatura de 25°C.



**Figura 3.** Patrones obtenidos por electrodeposición a diferentes tiempos a corriente constante igual a 3 mA y a la temperatura de 25°C.



**Figura 4.** Variación de la dimensión fractal  $D_0$  de los patrones formados en el tiempo para diferentes valores de corriente, 10.3 mA (alta) y 3 mA (baja).

## 4 Modelo mesoscópico

**A. Geometría del sistema.** Con el propósito de establecer un formalismo estocástico se postula que el sistema considerado está formado por dos fases distinguibles entre sí: una es la disolución en la cual se encuentran disueltos los iones  $I$ , y la otra es un sólido cuya superficie circular se encuentra en contacto con la disolución y sobre la cual se forma el agregado de partículas depositadas  $Z$ . Esta superficie se divide en celdillas elementales de igual área, donde todas estas celdillas tienen forma de sector anular, excepto la del centro, que es circular, y sobre la cual se deposita la partícula semilla a partir de la cual se conforma todo el conglomerado (ver Figura 7).

Cada celdilla tiene un centro de coordenadas definido por el radio  $r$  y el ángulo  $\theta$ . El área de la celda central se determina como:

$$\alpha_0 = \pi r_0^2 \quad (1)$$

mientras que el área del resto de las celdillas, considerando que la distancia entre los anillos es constante e igual a  $r_0$ , está dada por:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2} \theta_n \left[ (r_n + 0,5.r_0)^2 - (r_n - 0,5.r_0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \theta_n r_0 r_n \end{aligned} \quad (2)$$

Para garantizar que todas las celdillas elementales tengan igual área el espacio no puede ser discretizado de forma arbitraria, sino que el número de sectores anulares depende de la distancia al centro de la superficie. En este caso, a partir de consideraciones geométricas, se obtiene que el número de celdas  $N_r$  en un anillo donde todas sus celdillas tienen como coordenada radial el valor de  $r_n$ , está dado por:

$$N_r = 4\sqrt{\pi \cdot \alpha_0} \frac{r_n}{\alpha_0} \quad (3)$$

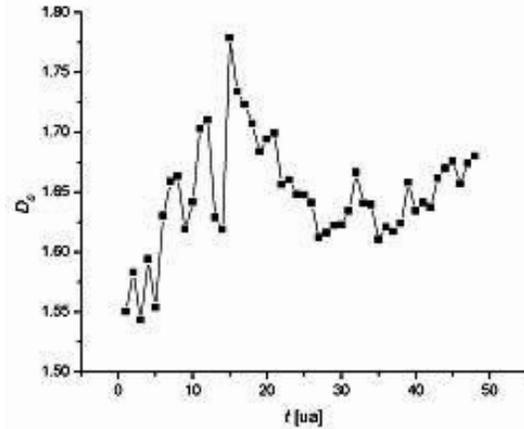
**B. Formación de los patrones.** En la formación de los patrones se asume que: en el centro de la superficie tiene lugar la deposición de una primera partícula, la cual actúa como un atractor primario para los iones, los cuales se mueven en dirección radial hacia el atractor. Los iones se mueven libremente hasta que encuentran una partícula depositada, con la cual interaccionan, convirtiéndose entonces en parte del agregado. Debido a que la deposición ocurre cuando se produce la interacción, y es más probable que los iones interaccionen con las partículas depositadas que se encuentran en las zonas más alejadas del centro, la estructura empieza a ramificarse a partir del centro y comienza a definirse su carácter fractal. Posteriormente, las partículas que forman parte del agregado primario, pueden a su vez convertirse en atractores secundarios de los iones, produciéndose entonces la formación de ramificaciones y agregados secundarios que rompen con la simetría original del agregado (ver Figura 8).

Este proceso se repite, de forma tal que es posible, al

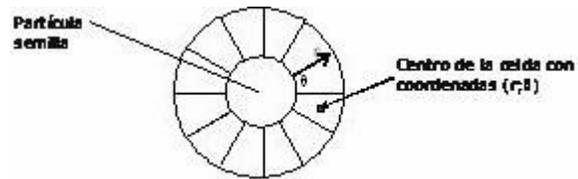
menos teóricamente, la formación de infinitas ramificaciones. Cada ramificación implica una bifurcación, en el sentido de que los iones cambian la dirección de su movimiento y se orientan hacia el nuevo atractor. Es importante señalar que la formación de las ramificaciones ocurre de forma simultánea, es decir, la formación de los agregados secundarios se produce mientras a su vez evoluciona el agregado primario.



**Figura 5.** Patrón aleatorio obtenido por la simulación con el modelo DLA, para 10000 partículas



**Figura 6.** Variación de la dimensión fractal  $D_0$  de los patrones formados en el tiempo generados por la simulación con el modelo DLA



**Figura 7.** Discretización del espacio para modelar el sistema, donde  $r$  representa la distancia radial desde el centro de la superficie y  $\theta$  representa el ángulo

Por otra parte, se establecen un conjunto de definiciones importantes para establecer las bases de un modelo coherente. En primer lugar, se considera como *entidad* a un sitio de la superficie que se encuentra ocupado, mientras que un *atractor* es una entidad que es capaz de atraer

hacia sí a los iones.

En segundo lugar, se considera la escala en la cual se realizan las observaciones, y que en el experimento pueden observarse sitios ocupados, es decir, entidades, que al nivel microscópico tengan una determinada estructura fractal, tal y como se muestra en la Figura 9.

A partir de las consideraciones anteriores, relativas a la formación de la estructura y sus características, se definen los fenómenos que ocurren a escala microscópica. Para ello lo que se visualiza es lo que sucede en cada celdilla elemental del espacio, donde el estado de cada celdilla se caracteriza por el número de iones disueltos en contacto con esta y el número de partículas que se encuentran depositadas.

Se considera entonces que el cambio en el estado de la celda es causado por dos fenómenos fundamentales: el primero es el movimiento de los iones (migración, difusión y convección) hacia el atractor, donde esta movilidad solo ocurre en aquellas zonas en las cuales no existen partículas depositadas. El segundo es la deposición, la cual solo puede tener lugar cuando un ión llega a una celda, adyacente a la cual existe una celda ocupada por una partícula depositada. Nótese que la movilidad y la deposición son fenómenos excluyentes entre sí, y que una vez que se produce la deposición en un sitio en este se alcanza un estado estacionario, ya que la deposición es irreversible (se garantiza la ausencia de electrodisolución).

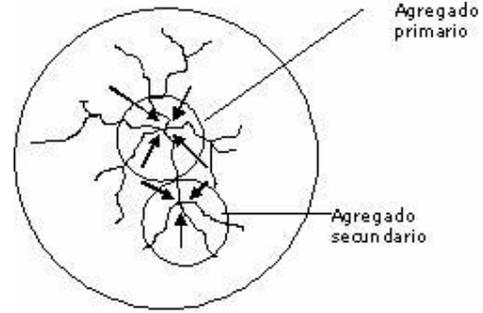
Considerando estos dos fenómenos se suponen entonces los tres procesos microscópicos fundamentales que tienen lugar al nivel de las partículas individuales y las celdillas elementales. El primer proceso es el aumento de los iones debido a la movilidad de estos desde las celdas adyacentes más alejadas del atractor, el segundo proceso es la disminución de los iones debido al movimiento de estos hacia las celdas más cercanas al atractor y el tercer proceso es la conversión de los iones en partículas depositadas cuando en la celda adyacente existen partículas depositadas. Estos procesos tienen lugar con determinada probabilidad.

En este caso, las probabilidades *a priori* que se establecen son las probabilidades de transición por unidad de tiempo asociadas a los procesos microscópicos. A partir de estas probabilidades *a priori* se obtiene la Ecuación Maestra (EM) que describe el comportamiento de la probabilidad asociada a la concentración de los iones y de las partículas depositadas, respectivamente, en una celda elemental. Como solo interesa el comportamiento del patrón espacial de las partículas depositadas, la EM se resuelve congelando el sistema en el tiempo, es decir, se obtiene la solución correspondiente al estado estacionario.

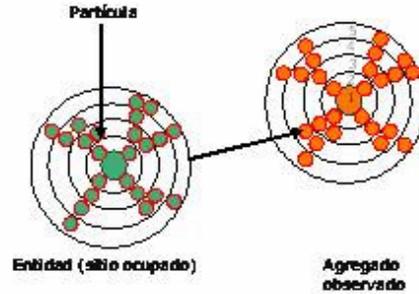
**C. Obtención y solución de la EM.** Para obtener la EM es necesario definir las ecuaciones que describen las probabilidades de transición por unidad de tiempo asociados a cada uno de los procesos que tienen lugar a escala microscópica y el cambio en el estado de la celda

que tiene lugar cuando ocurren los mismos. Se considera la presencia de dos especies de entidades, los iones  $I$  y las partículas  $Z$  depositadas sobre la superficie y que conforman el agregado. De esta forma, el estado de cada celda elemental se define a través del vector:

$$n(r, \theta) = \begin{bmatrix} I(r, \theta) \\ Z(r, \theta) \end{bmatrix} \quad (4)$$



**Figura 8.** Ramificaciones que ocurren en un agregado de partículas con dimensión fractal. Las flechas indican la dirección seguida por los iones durante la formación del agregado producto de la anisotropía creada en el espacio por un atractor.



**Figura 9.** Concepción de agregado, entidad y partícula de acuerdo con las consideraciones establecidas

Los procesos que se suponen que tienen lugar al nivel de las entidades elementales y que provocan un cambio en el estado de la celda, así como las probabilidades de transición asociadas a los mismos, son los siguientes: El incremento en 1 de los iones en la celda con coordenadas  $(r, \theta)$  debido al movimiento de estos desde el sitio adyacente  $(r + \Delta r, \theta)$ :

$$W_1 = \frac{v}{\Delta r} E_r^{\Delta r} [I(r, \theta)] \delta[Z(r, \theta)] \quad (5)$$

Donde se supone que esta probabilidad de transición es lineal con respecto al número de iones en la celda adyacente con coordenadas  $(r + \Delta r, \theta)$  y directamente proporcional al inverso del tiempo de residencia de los iones en contacto con la celdilla, definido como la distancia entre las celdas y la velocidad de movimiento de la partícula en la dirección radial. La delta  $\delta$  de Dirac que aparece en la ecuación implica que esta movilidad solo es posible cuando en la celda no existen partículas depositadas.

El segundo proceso, es la disminución en 1 de los iones presentes en la celda con coordenadas  $(r, \theta)$  debido al paso de las partículas hacia la celda con coordenadas  $(r - \Delta r, \theta)$ :

$$W_2 = \frac{v}{\Delta r} I(r, \theta) \delta \left[ E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] \right] \delta [Z(r, \theta)] \quad (6)$$

Donde esta probabilidad de transición, al igual que la anterior, se considera proporcional al inverso del tiempo de residencia de los iones en la celda y que depende linealmente de la concentración de partículas en la celda. Al igual que en la ecuación (5) la presencia de las dos funciones de Dirac implica que esta disminución asociada a la movilidad solo es posible cuando no existen partículas depositadas en la celda analizada ni en la adyacente.

El tercer proceso es la disminución en 1 de los iones debido a su deposición al contactar con una partícula depositada en el sitio adyacente:

$$W_3 = k_d I(r, \theta) \left[ E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] - Z(r, \theta) \right] \quad (7)$$

Se supone que este proceso solo ocurre cuando no existen partículas depositadas en la celda analizada pero sí en la celda adyacente. En las ecuaciones anteriores  $v$  es la velocidad radial de movimiento de los iones debido a la atracción ejercida por la partícula semilla,  $k_d$  es una constante que involucra al inverso del tiempo requerido por la reducción de los iones zinc y formar parte del conglomerado,  $\Delta r$  caracteriza el tamaño de la celda elemental y  $E$  es el operador paso que actúa sobre las funciones en variable discreta de forma tal que:

$$E_n^a [f(n)] = f(n + a) \quad (8)$$

A partir de las probabilidades de transición por unidad de tiempo dadas por las ecuaciones (5), (6) y (7) se obtiene la EM<sup>18</sup> que describe al sistema bajo estudio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & (E_r^{-1} - 1) \frac{v}{\Delta r} E_r^{\Delta r} [I(r, \theta)] \delta [Z(r, \theta)] P \\ & + (E_r^{+1} - 1) \frac{v}{\Delta r} I(r, \theta) \delta \left[ E_r^{-\Delta r} [I(r, \theta)] \right] \delta [Z(r, \theta)] P \\ & + (E_r^{+1} E_z^{-1} - 1) k_d I(r, \theta) \left( E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] - Z(r, \theta) \right) P \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $P$  es la probabilidad de tener  $I$  iones y  $Z$  partículas depositadas en la celda al tiempo  $t$ .

En la ecuación (9) aparecen involucradas dos escalas de tiempo diferentes. Una está relacionada con el tiempo de observación asociado a la formación del patrón al nivel macroscópico, y aparece de forma explícita en la derivada temporal del lado izquierdo de la ecuación. La otra escala está relacionada con la duración temporal de los procesos que tienen lugar a escala microscópica, y se encuentra implícita en las probabilidades de transición por unidad de tiempo. La condición inicial que se establece para la solución de la EM es que para tiempo igual a cero no existen partículas depositadas en ninguna celda excepto en la celda central, donde se encuentra la partícula semilla que actúa como atractor primario y a partir de la cual se genera todo el agregado.

La ecuación maestra (9) es no lineal en el sentido de las probabilidades de transición por unidad de tiempo,

por lo que para resolverla es inevitable el empleo de métodos aproximados, lo que constituye una de las limitaciones del modelo.

Como se explicó anteriormente, lo que interesa describir es el patrón espacial que forman las partículas depositadas, por lo que la solución de interés es la correspondiente al estado estacionario. En este sentido, se supone que en las cercanías a este la función de probabilidad asociada a la cantidad de partículas depositadas es normal o gaussiana, por lo que la misma queda completamente definida a través del primer momento o valor esperado y el segundo momento o varianza. Es por ello que para encontrar la solución de la ecuación maestra se aplica el método de aproximación lineal al ruido<sup>19</sup>.

Para esto se determina el primer y el segundo momento asociado a las probabilidades de transición por unidad de tiempo, donde el primer momento  $\omega_1$  es un vector definido como:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_I \\ \omega_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 - W_2 - W_3 \\ W_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

y el segundo momento  $\omega_2$  es una matriz dada por:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \begin{bmatrix} \omega_{II} & \omega_{IZ} \\ \omega_{ZI} & \omega_{ZZ} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W_1 + W_2 + W_3 & -W_3 \\ -W_3 & W_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Se determina entonces la derivada del primer momento de las probabilidades de transición por unidad de tiempo con respecto al vector de estado  $n$  dado por la ecuación (4), el cual está dado por la:

$$\partial_n \omega_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial I} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{bmatrix} [\omega_I \quad \omega_Z] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_I}{\partial \omega_I} & \frac{\partial \omega_I}{\partial \omega_Z} \\ \frac{\partial \omega_Z}{\partial \omega_I} & \frac{\partial \omega_Z}{\partial \omega_Z} \end{bmatrix} \quad (12)$$

De acuerdo con el método de la aproximación lineal al ruido el comportamiento del valor esperado del vector de estado se describe a través de la ecuación diferencial:

$$\frac{dn}{dt} = \omega_1 \quad (13)$$

Mientras que el comportamiento de la matriz  $\sigma^2$  de las varianzas y covarianzas se describe a través de la ecuación diferencial:

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = (\partial_n \omega_1) \sigma^2 + \sigma^2 (\partial_n \omega_1)^T + \omega_2 \quad (14)$$

A partir de las ecuaciones de la (10) a la (14) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dI(r, \theta)}{dt} &= \frac{v}{\Delta r} E_r^{+\Delta r} [I(r, \theta)] \delta [Z(r, \theta)] \\ &- \frac{v}{\Delta r} I(r, \theta) \delta [Z(r, \theta)] \delta \left[ E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] \right] \\ &- k_d I(r, \theta) \left( E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] - Z(r, \theta) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{dZ(r, \theta)}{dt} = k_d I(r, \theta) \begin{pmatrix} E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] \\ -Z(r, \theta) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\frac{d \text{var}(I)}{dt} = \left[ \frac{v}{\Delta r} \delta [Z(r, \theta)] \delta [E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)]] + k_d (E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] - Z(r, \theta)) \right] \text{var}(I) \quad (17)$$

$$+ \frac{v}{\Delta r} \delta [Z(r, \theta)] \begin{pmatrix} E_r^{+\Delta r} [I(r, \theta)] \\ +I(r, \theta) \delta [E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)]] \end{pmatrix} + k_d I(r, \theta) (E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] - Z(r, \theta))$$

$$\frac{d \text{cov}(I, Z)}{dt} = \begin{pmatrix} k_d (E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] - Z(r, \theta)) \\ + \frac{v}{\Delta r} E_r^{+\Delta r} [I(r, \theta)] \end{pmatrix} \text{cov}(I, Z) \quad (18)$$

$$- I(r, \theta) \begin{pmatrix} \frac{v}{\Delta r} E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] \\ -k_d \end{pmatrix} \text{cov}(I, Z)$$

$$- k_d I(r, \theta) \begin{pmatrix} E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] \\ -Z(r, \theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d \text{var}(Z)}{dt} = k_d I(r, \theta) \begin{pmatrix} E_r^{-\Delta r} [Z(r, \theta)] \\ -Z(r, \theta) \end{pmatrix} \quad (19)$$

Las ecuaciones de la (15) a la (19) describen la evolución dinámica del proceso de electrodeposición en relación con el comportamiento del valor esperado de la concentración de iones y partículas, respectivamente, y la magnitud de las fluctuaciones que se producen alrededor de este valor como resultado del carácter aleatorio de la movilidad de los iones y la deposición de las partículas. Con el propósito de describir la formación del patrón utilizando como variable macroscópica la dimensión fractal se congela el sistema en el tiempo, considerando entonces la solución de estado estacionario correspondiente a la concentración de partículas depositadas  $\rho_z$  en la celda, que se determina como:

$$\rho_z = \frac{Z}{\Omega} \quad (20)$$

donde  $\Omega$  es el tamaño de la celda, el cual es igual al área de la misma. Sustituyendo la ecuación (20) en las ecuaciones (19) y (16) y expresando el operador paso  $E$  en su forma continua, se obtiene:

$$\frac{\partial \rho_z}{\partial t} = -k_d I(r, \theta) \frac{\partial \rho_z}{\partial r} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \text{var}(\rho_z)}{\partial t} = -\frac{k_d I(r, \theta)}{\Omega} \frac{\partial \rho_z}{\partial r} \quad (22)$$

Para obtener la solución de estado estacionario se hace igual a cero la derivada temporal que aparece en ambas ecuaciones, de donde se obtiene:

$$\rho_z = cte \quad (23)$$

$$\text{var}(\rho_z) = \frac{\rho_z}{\Omega} = \frac{\rho_z}{\pi r^2}$$

Una vez que se ha obtenido una ecuación para describir la concentración de partículas depositadas en una celda elemental se considera entonces como sistema observado no una celda elemental, sino una zona del agregado en el cual existe un solo atractor. Para ello se integra  $\rho_z$  con respecto al radio y se calcula la varianza considerando como sistema observado el tamaño total de la zona observada del agregado. En este caso, tomando en cuenta las consideraciones establecidas, se obtiene que la función de probabilidad asociada a la concentración de partículas en una zona del agregado donde existe un solo atractor está dada por:

$$P(s) = \frac{r^{0.5}}{\sqrt{4\pi\eta}} \exp\left(-\frac{r(s - 2\pi\eta r)^2}{4\eta}\right) \quad (24)$$

donde  $P(s)$  es la probabilidad de tener una concentración  $s$  de partículas en una determinada zona del agregado y  $\eta$  es una constante que representa la cantidad de partículas que pueden ser contenidas en una celda. Nótese en este caso que la varianza es inversamente proporcional al tamaño del sistema observado, lo cual implica que la probabilidad de encontrar una partícula del agregado en una zona observada del mismo se incrementa a medida que se aumenta el tamaño de esta zona, lo cual está de acuerdo con las observaciones experimentales. Esta probabilidad representa el modelo mesoscópico del sistema, en el cual la concentración de partículas en una región del agregado resulta ser una variable estocástica debido al carácter aleatorio de los procesos que tienen lugar a escala microscópica.

**D. Obtención de la dimensión fractal.** La ecuación (24) indica que la distribución espacial de las partículas depositadas, y por ende la morfología particular que presenta el patrón, tiene un carácter probabilístico. Esto se refleja en el hecho de que, dos patrones, que aparentemente presentan morfologías diferentes cuando se observan visualmente, sean equivalentes cuando se caracterizan a través de la dimensión fractal (véase por ejemplo las imágenes de los patrones a 390 s en las figuras 2 y 3).

Sin embargo, para poder definir la dimensión fractal en su forma general es necesario estimar como se comporta la cantidad de entidades con respecto al radio del agregado en su conjunto, y no de una zona del mismo, así como establecer si las entidades son partículas individuales o agregados secundarios. Para esto se toma en cuenta el concepto de probabilidad como conjunto, en el cual la probabilidad se define como el número de entidades totales observadas dividido por el número de sitios

totales. Desde este punto de vista, el valor esperado de la probabilidad dada por la ecuación (24) se va a suponer como una estimación de la densidad de entidades presentes dentro de un radio  $r$  del agregado, tomando como radio igual a cero el centro de la superficie circular en la cual se genera todo el conglomerado y como  $\eta$  la densidad de sustancia en la entidad. En este caso, la cantidad de entidades contenidas dentro de un radio  $r$  se determina como:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^{2\pi r} \int_0^0 \langle P(s) \rangle dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi r} \int_0^0 C \frac{r^{0.5}}{\sqrt{\eta}} dr d\theta\end{aligned}\quad (25)$$

donde  $C$  es una constante.

La ecuación (25) se refiere al número de entidades, por lo tanto, se establece la siguiente expresión general para determinar la concentración de partículas en una entidad:

$$\eta = \frac{kr_0^{D_0}}{\pi r_0^2}\quad (26)$$

donde  $D_0$  es la dimensión fractal de la entidad que actúa como atractor, la cual es igual a la dimensión topológica cuando la entidad observada es una partícula individual del agregado, mientras que será menor que dos cuando se ha producido una bifurcación en el sistema, de forma tal que las partículas que forman parte del agregado primario se convierten en atractores y se forman las ramificaciones secundarias.

En este sentido, tomando en cuenta que es posible la formación de infinitas ramificaciones, las ecuaciones (25) y (26) se relacionan entre sí de forma apropiada para establecer un algoritmo que describa la evolución de la dimensión fractal a medida que se van produciendo estas ramificaciones. Partiendo de esta definición se reescribe entonces la ecuación para obtener el valor esperado del número de partículas en función del orden de la ramificación:

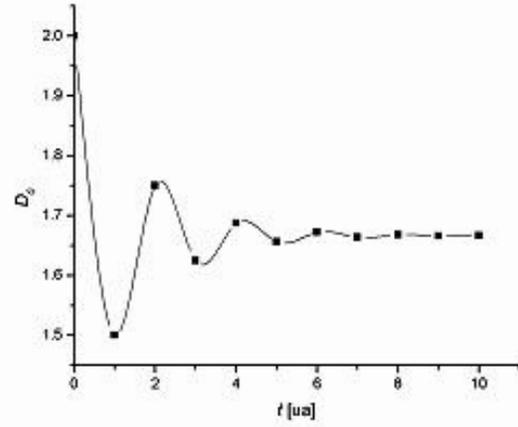
$$\begin{aligned}\langle \Phi \rangle &= \int \frac{r^{0.5}}{\left(2 \frac{Kr^{D_0}}{\pi r^2} \left(1 + \frac{\beta}{V}\right)\right)^{0.5}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) dr \\ \langle \Phi \rangle_{n+1} &= \int K_{n+1} r^{0.5+0.5(2-D_{0(n)})} dr \\ \langle \Phi \rangle_{n+1} &= \lambda_{n+1} r^{1.5+0.5(2-D_{0(n)})}\end{aligned}\quad (27)$$

Aplicando entonces el concepto de dimensión de capacidad se obtiene entonces un algoritmo discreto que permite el cálculo de la misma como:

$$\begin{aligned}D_{0(n+1)} &= 1.5 + 0.5(2 - D_{0(n)}) \\ D_{0(n=0)} &= 2\end{aligned}\quad (28)$$

En la ecuación (28)  $n$  es el número de la ramificación, y contiene implícitamente al intervalo de tiempo necesario para que se produzcan las bifurcaciones. En la figura 10 se muestra la dinámica discreta, generada a partir de

la ecuación (28) de la dimensión fractal de los patrones formados.



**Figura 10.** Dependencia de la dimensión fractal  $D_0$ , predicha por la ecuación (28) en unidades arbitrarias de tiempo (ua)

El modelo mesoscópico predice que aparecen oscilaciones en la dimensión fractal que se amortiguan y convergen a un valor constante aproximadamente igual a 1.7, lo que coincide con lo encontrado experimentalmente y lo predicho con el modelo DLA. Este resultado teórico implica que la presencia de oscilaciones en el comportamiento de la dimensión fractal durante la evolución del patrón puede ser explicada considerando que estas oscilaciones se deben a la aparición de nuevos atractores, a partir de los cuales se conforman nuevos agregados de partículas dentro del conglomerado, y donde estos agregados también tienen una geometría fractal.

## 5 Conclusiones

En resumen, en el presente trabajo mostramos resultados experimentales relacionados con la dinámica de formación de los patrones de zinc obtenidos por electrodeposición, donde se encuentra que aparecen oscilaciones en la dimensión fractal que se amortiguan y convergen a un valor constante de  $D_0 \cong 1.7$ . De hecho, se encontró una fenomenología semejante al realizar la simulación utilizando el modelo DLA.

Se propone un modelo mesoscópico que permite una mejor comprensión de la morfogénesis de la dinámica de formación de patrones. En este sentido, este formalismo estocástico, posibilita no solo reproducir sino también entender la física de la complejidad observada.

A partir del modelo mesoscópico se obtuvo una ecuación que al relacionar la concentración de partículas depositadas con la probabilidad visualizada desde el punto de vista del conjunto explica que la distribución espacial de las partículas y la morfología particular de cada patrón tiene un carácter estocástico, lo que se refleja en el hecho de que, dos patrones, que aparentemente presentan morfologías diferentes cuando se observan visualmente, sean equivalentes cuando se caracterizan a través de la dimensión fractal.

Otra característica importante del formalismo desarrollado es que se obtiene una ecuación discreta para predecir el comportamiento oscilatorio de la dimensión fractal y que permite reproducir los resultados fenomenológicos obtenidos.

## Agradecimientos

Nuestro agradecimiento a los Prof. C. Núñez y E. Pe-láez por sus valiosas sugerencias y comentarios. Este trabajo fue financiado parcialmente mediante el convenio entre la Universidad del Noreste y el Laboratorio SAS de Tampico, México. El trabajo de EIK, ET y JMN ha sido financiado por el Ministerio de Educación Superior.

## Referencias

1. M. Matsushita, F. Hiramatsu, N. Kobayashi, T. Ozawa, Y. Yamazaki and T. Matsuyama, *Biofilms* 1, 305 (2004)
2. O. Praud and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* 72 011406 (2005).
3. A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990).
4. A.L. Barabasi and H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
5. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems* (Wiley, NY, 1977).
6. P. Glandorf et I. Prigogine, *Structure Stabilité et Fluctuations* (Mansson et C<sup>ie</sup>, 1971)
7. B. Mandelbrot, *La geometría fractal de la naturaleza* (Tusquets Editores, 1997)
8. M. Matsushita, M. Sano, Y. Hayakawa, H. Honjo and Y. Sawada, *Phys. Rev. Lett.* 53, 286 (1984)
9. J.M. Costa, F. Sagués, and M. Vilarrasa, *Phys. Rev.* 43 7057 (1991).
10. P.P. Trigueros, F. Sagués, J. Claret, F. Mas, *J. Electroanal. Chem.* 328 165(1992).
11. F. Argoul, J. Huth, P. Merzeau, A. Arnéodo and Harry L. Swinney, *Physica D* 62 170 (1993).
12. V. Fleury, *Nature* 30 145(1997).
13. S. Wang, K. Zhang, Q. Xu, M. Wang, R. Peng, Z. Zhang and N. Ming, *J. Phys. Soc. Jpn.* 72 1574 (2003).
14. T. A. Witten and L. M. Sander, *Phys. Rev. Lett.* 47 1400 (1981).
15. T. C. Halsey, *Physics Today* 53 36(2000).
16. L. M. Sander, *Contemporary Physics* 41 203 (2000).
17. A. Block, W. von Bloch and H.J. Schellnhuber, *Phys. Rev.* 42 1869 (1991).
18. Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods*, (Springer-Verlag, 2004).
19. N.G Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, (N.H Publications, 1992).

# Experiencias en la enseñanza de la física de los sistemas complejos en la cátedra “Henri Poincaré”

Oscar Sotolongo Costa

Cátedra de Sistemas complejos “Henri Poincaré”. Fac. de Física, U.H. [osotolongo@fisica.uh.cu](mailto:osotolongo@fisica.uh.cu)

Recibido el 5/06/2006. Aprobado en versión final el 1/12/2006.

**Sumario.** Se exponen algunas de las experiencias más importantes que se han obtenido al impartir la docencia de la física de los fenómenos complejos, tanto a nivel de pregrado como de postgrado, en la Cátedra de sistemas complejos “Henri Poincaré” a lo largo de varios cursos. Se resalta en particular la inclusión de simulaciones en clase y la implementación de trabajos de laboratorio, tanto experimentales como computacionales.

**Abstract.** Some of the most important experiences in teaching the physics of complex systems in the “Henri Poincaré” group of complex systems are exposed. Teaching was performed both in the undergraduate and graduate levels for several years. The inclusion of classroom computer simulations and experimental and computational laboratories are highlighted.

**Palabras clave.** Docencia 89.75.-K, física de los fenómenos complejos 01.40.GB

## 1 Introducción

En este trabajo, presentado en el evento del taller de la física de la complejidad en el marco del evento internacional “Complejidad 2006”, presentamos nuestras (mejores) experiencias en la impartición de la física de los sistemas complejos.

Está claro que la creación de una cátedra dedicada al tema implica como uno de sus objetivos principales la divulgación de estas nuevas tendencias que van teniendo lugar en la física y que en su conjunto pueden clasificarse como “física de la complejidad” para caracterizar el ajiaco conceptual que en realidad es y que tan bien encaja en nuestra idiosincrasia tropical, iconoclasta, sincrética y ecléctica.

Expondremos de forma breve los contenidos en que creemos vale la pena fijar más la atención por las posibilidades de hacer llegar al estudiante de forma no ortodoxa.

También nos detendremos a ver algunos temas en particular, por la resonancia que tienen en la formación de un modo de pensar (y hacer) en física y, quizás, en otros

campos del saber.

Así, expondremos nuestro punto de vista acerca de la impartición del tema de sistemas dinámicos, la forma de introducirlos y como llegar por esta vía al concepto de caos determinista, en otra sección se expone un complemento importante, los mapas, en particular el logístico y la ilustración de la vía a 1 caos por duplicación de período. Los mapas son, como dijimos, un complemento ya que su inclusión en el curso permite introducir aspectos muy importantes tales como el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser y la transición al caos en los sistemas no integrables.

Se expone la forma en que introducimos el concepto de fractal, muy vinculada a la dimensión de Hausdorff.

En la última sección hacemos una “crítica de la criticalidad”, no tanto por los recientes trabajos que exponen serias objeciones al concepto de “criticalidad auto organizada” sino más bien (y además) por la forma en que hemos incluido el tratamiento de sistemas que se consideran paradigmas de la criticalidad auto organizada, como las lomas de arena y los terremotos.

En toda nuestra exposición haremos énfasis en la

prioridad del rigor, convencidos de que el rigor formal y lógico no solo no esta reñido con la didáctica sino que la ayuda. Un concepto expuesto rigurosamente, no con el falso rigor que todo lo oscurece, sino con el verdadero, que ayuda a razonar, se asimila y aprehende mejor que al ser vulgarizado y deformado en su enseñanza. Esperamos que nuestra exposición así lo demuestre.

La sinergia con las computadoras se expone constantemente, quizás en demasía, por lo que pedimos de antemano disculpas.

## 2 Contenidos y métodos

El programa incluye los tópicos tradicionales de sistemas dinámicos con la correspondiente profundización en la técnica de las ecuaciones diferenciales, además de la teoría de bifurcaciones y el caos. Vuelos de Levy, criticidad y otros contenidos de “avanzada” como la física de los fenómenos de roturas y de los medios granulares y redes complejas. Esto quiere decir que los temas tratados, incluso a nivel de pregrado, se relacionan directamente con trabajos de investigación realizados en la Cátedra. En breve ilustraremos esto.

Además, lo dicho anteriormente en relación con las computadoras y la asombrosa sinergia que existe entre estas y los mas diversos campos de actividad humana obliga a emplearlas en el aula durante las clases, claro que no solo para proyectar las presentaciones (Lo cual está muy bien, por cierto), sino para estudiar “en caliente” el comportamiento de diferentes sistemas eventualmente bautizados como “complejos”: El péndulo doble, la loma de arena, el caminante de Levy y muchos otros.

Hay (desgraciadamente, todavía en insuficiente cantidad) tareas experimentales como es la medición de dimensiones fractales<sup>2</sup>, y trabajos en forma de proyectos, como la construcción de una “máquina de catástrofes”, y también, claro está, los “laboratorios computacionales” donde los estudiantes deben profundizar en la aplicación de los métodos numéricos y la simulación de sistemas. Los lenguajes de computación más empleados son Mathematica y Qbasic, sin excluir otros paquetes de cómputo muy útiles<sup>3</sup>.

La evaluación no es tradicional, sino que puede consistir en la entrega de tareas por los alumnos o la designación a criterio del profesor de determinados trabajos o proyectos a realizar por algunos estudiantes. Este método se emplea lo mismo a nivel de pregrado que de postgrado.

Hay que tener presente que a llegar el estudiante al curso, conoce, por regla general la mecánica de Newton, y está generalmente imbuido del gran poder de predicción mecánica y el rigor en la descripción mecánica de la naturaleza que proporciona la mecánica clásica, lo cual puede sintetizarse en la frase de Laplace:

*“UNA INTELIGENCIA QUE CONOCIERA TODAS LAS FUERZAS QUE ANIMAN LA NATURALEZA, ASÍ COMO LA SITUACIÓN RESPECTIVA DE LOS SERES QUE LA COMPONEN... PODRÍA ABARCAR EN UNA*

*SOLA FÓRMULA LOS MOVIMIENTOS DE LOS CUERPOS MÁS GRANDES DEL UNIVERSO Y LOS DEL ÁTOMO MÁS LIGERO; NADA LE RESULTARÍA INCIERTO Y TANTO EL FUTURO COMO EL PASADO ESTARÍAN PRESENTES A SUS OJOS”* (P.S. Laplace, “Los Principios de la Mecánica Celeste”)

El tema relativo a los sistemas dinámicos es vital dentro del curso. El pretexto para su inclusión está en la ley de Newton:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(x, \dot{x}, t)$$

Donde F es la fuerza ejercida sobre el cuerpo, x su posición y m su masa, si e esta ecuación se disminuye el orden de la derivada, entonces es posible expresar las ecuaciones de movimiento en forma de ecuaciones de primer orden y obtener así un « sistema dinámico »:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = F(x, x_1, t) \end{array} \right\} \text{Sistema Dinamico}$$

El tratamiento de los sistemas dinámicos se guía esencialmente por los textos ya consagrados en este campo (Schuster, Nicolis, Strogatz, etc.). La manera de introducir el caos como sensibilidad a las condiciones iniciales se hace a partir de las ecuaciones de LORENZ:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= (r - z)x - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

Y se estudia “experimentalmente” (esto es en la clase, con la computadora) el comportamiento del sistema, desde su comportamiento regular hasta la variación irregular que ya conocemos y se ilustra en la figura 1:

El sistema en su conjunto, gracias a los métodos desarrollados por Poincaré y a la existencia de las computadoras, puede verse en su desarrollo como el caprichoso movimiento de un punto en un espacio llamado “de fases”, constituido por las variables del sistema y sus derivadas temporales, donde el tiempo de permanencia en una región de ese espacio es en principio impredecible y depende infinitamente de las condiciones iniciales.

Aquí ilustramos ese comportamiento: esta extraña figura en forma de antifaz atrae siempre al sistema de Lorenz y lo hace moverse entre sus lóbulos (fig. 2). El tiempo de permanencia así como la cantidad de giros en cada uno, etc., son impredecibles. Vale decir, *depende infinitamente de las condiciones iniciales del sistema*. Es recomendable hacer que la computadora construya dos atractores de Lorenz simultáneamente, separados por una pequeña diferencia en las condiciones iniciales. Se comprueba fácilmente que aunque la diferencia en las condi-

ciones iniciales disminuya cien veces, el tiempo en que las trayectorias se separan ostensiblemente no aumenta mucho.

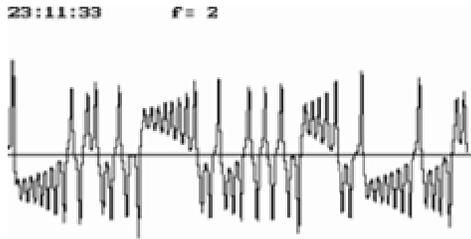


Figura 1. Variación de  $x$  vs.  $t$  en el sistema de Lorenz

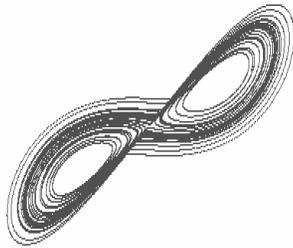


Figura 2. El atractor de Lorenz

El sistema en ese caso se dice que es “caótico” pero observemos que está descrito por ecuaciones diferenciales rigurosamente planteadas. Es entonces un caos que no se ajusta a nuestro concepto intuitivo de lo caótico: un caos *determinista*.

Si ahora decimos que dicho “sistema” es el modelo que elaboró Lorenz para la convección del aire atmosférico, y que este modelo es ya una gran simplificación de las ecuaciones que describen ese movimiento, podemos entender la difícil tarea que tienen ante sí los meteorólogos, que injustamente muchas veces cargan la culpa de un pronóstico errado. Gráficamente hablando, quizás de forma algo poética, el aleteo de una mariposa en una selva amazónica puede dar lugar a la formación de un huracán en las costas de África

Se pone en claro con esto la necesidad del estudio y el empleo de los métodos estadísticos. Ya no se trata sólo de aplicar la estadística en sistemas de los cuales no se conocen bien sus leyes, como el lanzamiento de un dado, la propagación de una epidemia, etc. Se trata también de que es necesario emplear métodos estadísticos en la interpretación de problemas de mecánica cuántica y hasta de problemas en los que la ecuación del movimiento es conocida: sistemas caóticos deterministas.

Pero en realidad la esencia del movimiento caótico se pone en claro con el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser cuando se investiga hasta que punto un sistema hamiltoniano integrable (cuasiperiódico) puede ser perturbado y se comprueba la destrucción progresiva de los toros (toros KAM) a medida que la perturbación aumenta. Eso pone en claro que todo sistema en que el número de constantes de movimiento es menor que el de grados de libertad (La enorme mayoría de los sistemas reales) es caótico. ¡La mecánica determinista de Laplace ha sido

destronada!

### 3 Mapas

Ese es uno de los capítulos más motivantes y que más permite la interacción con las computadoras, tanto en clase como fuera de ella. El ejemplo clásico es el mapa logístico:

$$x_{n+1} = lx_n(1 - x_n)$$

donde  $l$  es una constante entre 0 y 4;  $x_n$  es el valor de la variable en la aplicación  $n$ -ésima del mapa. Como se ve, el valor de  $x$  en cada aplicación depende de valor en la aplicación anterior.

Muchos sistemas o bien pueden llevarse a este tipo de descripción o gozan (quizás sería mejor decir que sufren) de las mismas propiedades que este mapa. Como ejemplo podemos mencionar la población de colonias de bacterias, donde en ese caso  $l$  esta relacionada con el medio externo.

Si en una colonia de microorganismos la población en un instante  $n$  es  $p_n$ , la de la próxima generación es proporcional a esta:

$$p_{n+1} = lp_n$$

Entonces al cabo de  $n$  generaciones la población sería

$$p_n = p_0 l^n$$

Pero al crecer la población hay competencia por el alimento y debemos sustituir la constante  $l$  por una  $l$  efectiva  $l_{eff}$ .

Una forma simple es:

$$l_{eff} = l - ap \quad ; \text{ así:}$$

$$p_{n+1} = lp_n - ap_n^2$$

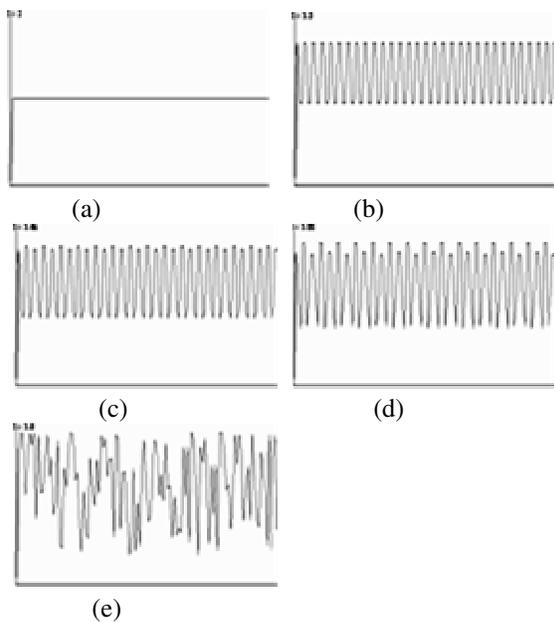
definiendo  $p_n \equiv \frac{1}{a} x_n$  :

$$x_{n+1} = lx_n(1 - x_n)$$

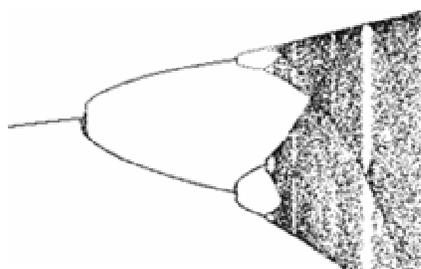
La ecuación logística representa un caso sencillo de no-linealidad. Su importancia radica en la universalidad de sus propiedades, como veremos más adelante.

La figura 3 muestra la variación de  $x$  en el tiempo para distintos valores de la constante  $l$ . Como puede verse, el periodo de variación de la población se va duplicando a medida que crece  $l$ , hasta que es tan grande que ya se demora un tiempo excesivamente largo en repetirse, o sea es caótica. Este mecanismo de transición al caos se conoce como “duplicación del período”. (period doubling en la literatura en inglés).

La variación de la función que estudiamos, es decir los límites entre los que fluctúa dependen de la constante  $l$ , como se ve en la figura 4, donde se muestra la variación del valor de la generación  $n$ -ésima en función de  $l$ . En realidad esa gráfica es la superposición de muchas generaciones que dan ese resultado final tan curioso, y del cual se destaca también su “invarianza de escala” en determinados lugares.



**Figura 3.** Variación del comportamiento del mapa logístico



**Figura 4.** Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico

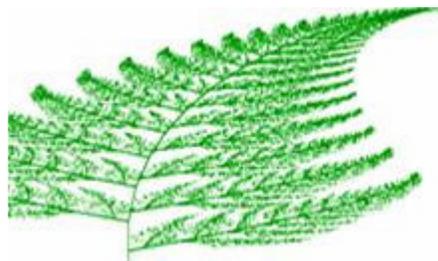
En cada ramificación de la figura 4 puede observarse la misma estructura, por lo que hablamos de “invarianza de escala” La población en diferentes valores de  $r$  tiene un valor, para otros valores va oscilando entre dos valores otras veces entre cuatro, etc. La complejidad del gráfico anterior muestra una estructura rica en detalles y un comportamiento con el que es imposible aburrirse.

## 4 Fractales: la otra geometría

Hasta hace relativamente poco, la geometría creada por los griegos fue símbolo de perfección tanto en su construcción lógica como en su papel de instrumento de análisis de la naturaleza: Una gota de agua puede considerarse una esfera, la trayectoria de un proyectil como una parábola, la de una partícula libre como una línea recta (luego Einstein la convirtió en una geodésica, pero eso no cambia las cosas) y hasta en algunos casos decimos que la Tierra es una esfera, y en general siempre podemos tomar una unidad de longitud adecuada, “típica” para expresar las distancias, y una unidad de tiempo para preguntarnos cuánto más durará la espera del “camello”.

Pero la naturaleza rebasa esta descripción: Por ejem-

plo, las nubes no son esferas, las montañas no son conos y los relámpagos no viajan en línea recta. La complejidad de formas en la naturaleza difiere no sólo en el grado, sino también en la clase de formas de la geometría ordinaria. Se hizo necesaria una geometría que describiera la caprichosa “invarianza de escala” que presentan muchas formas de la naturaleza: el hecho curioso de que el objeto en su conjunto se parece a una parte del mismo. Un buen ejemplo lo constituye esta hoja de helecho generada en computadora (fig. 5):

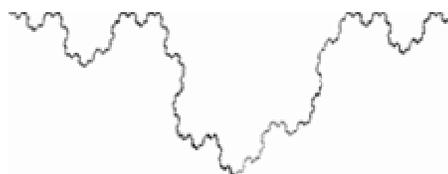


**Figura 5.** Hoja de helecho generada en computadora

Lo que es aún más revelador: En realidad en este y otros muchos casos en un amplio rango espacial no existe una longitud típica para expresar estas formas.

Se trata de que la naturaleza tiene una geometría “fractal” que exhibe esta invarianza de escala. Su manifestación es omnipresente: desde un papel arrugado hasta la línea de la costa de un país. Incidentalmente, un ilustre colega dijo por nuestros medios de comunicación que “Cuba es más grande que España” porque es mayor la longitud de sus costas. Si así hablamos, entonces el país más grande del mundo es una isla que pudiera construirse a partir de un triángulo equilátero de 1 cm de lado por un método recurrente: La “isla de Koch”. Su longitud, como la de todo fractal que se respete, es infinita.

Aquí vemos uno de los lados de la isla de Koch. Al repetirse la misma estructura en todas las escalas, es imposible medir su perímetro. O sea, su perímetro es infinito.



**Figura 6.** Curva de Von Koch

## 5 Crítica de la criticalidad

Las sorprendentes y paradójicas propiedades de estos extraños objetos en general no se detallan en los cursos tradicionales, sobre todo si son de pregrado. En nuestro caso hemos preferido introducir el estudio cuantitativo de los fractales a partir de la definición de dimensión de Hausdorff y, a partir de ahí, deducir las fórmulas con que se trabaja en la geometría fractal y sus aplicaciones, con

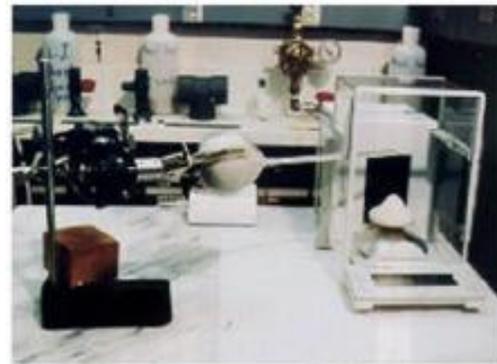
lo cual es más fácil introducir las famosas “leyes de potencia”.

Uno de los aspectos que más motivan el estudio de los fenómenos con distribuciones estadísticas de leyes de potencias, además de su simplicidad matemática (aparente), es su ubicuidad en la naturaleza y la sociedad. Además de la ley de Gutenberg-Richter de los terremotos, existe la llamada ley de Zipf de la distribución del tamaño de las ciudades, la distribución de intensidad de rayos X en las manchas solares, etc, etc. Este hecho llamó poderosamente la atención de los investigadores Per Bak, Chao Tang y Kurt Wiesenfeld en 1987, y propusieron la idea de la Criticidad Auto-Organizada (SOC, por sus siglas en inglés) como base de todos estos fenómenos. Si bien esta idea ha sido duramente criticada por muchos científicos, es innegable que ha llamado la atención de la comunidad científica internacional sobre ciertos aspectos interesantes de los fenómenos con distribuciones de leyes de potencias, produciendo un fructífero debate en el tema. Ocurre que muchas veces una idea errónea ó parcialmente errónea puede ser más útil al desarrollo de la ciencia que una teoría “correcta” en el sentido ortodoxo de la palabra. El *paradigma* con el que sus autores explican la teoría de la criticidad auto-organizada es la dinámica de la formación de una sencilla pila de arena.

Bak, Tang y Wiesenfeld, en su artículo de *Physical Review Letters* de 1989<sup>1</sup>, utilizan simulaciones computacionales para representar cómo se forma una pila de arena “ideal” sobre una superficie horizontal. A través del sencillo modelo utilizado, los autores se abstraen de las leyes de la Mecánica en su forma convencional, y así ahorran parte del enorme tiempo de cálculo que hubiera representado calcular las leyes de Newton en forma exacta para los muchos granos que forman una pila de arena. En el modelo de Bak, Tang y Wiesenfeld (BTW), no se usan granos irregulares como en la arena real, sino que éstos se toman como *cubos*. Los granos se van lanzando, uno a uno, sobre posiciones aleatoriamente escogidas de una superficie horizontal, de modo que van acumulándose sobre ella. La superficie horizontal está dividida en cuadrados, de modo que los cubos pueden ir acomodándose sobre los cuadrados, formando columnas. El acomodamiento de los cubos, en la medida de que van cayendo, siguen ciertas *reglas* bien determinadas, que forman parte del modelo BTW. Si en un sitio de la cuadrícula cae un cubo, y el número de cubos resultante es inferior a 4, el cubo caído se queda en posición. En cambio, si al caer, el número de cubos resultantes llega a 4, los cubos se mueven hacia las 4 cuadrículas más cercanas, de modo que la cuadrícula original queda vacía. Las mismas reglas deben aplicarse entonces a todas las demás cuadrículas sucesivamente, lo cual puede provocar, en principio, un grupo de saltos de cubos entre varias cuadrículas, definiendo una *avalancha*. Una vez que el programa determina que no deben moverse más cubos, se añade un nuevo cubo en una posición aleatoria del sistema, y se vuelven a aplicar las reglas. Y así sucesi-

vamente. La figura 6 ejemplifica la evolución de una avalancha de tamaño 36. *El tamaño lo hemos definido como la cantidad de saltos involucrados en la avalancha en cuestión.*

A diferencia de la pseudociencia, la ciencia auténtica tiene la necesidad de comprobar en la práctica la veracidad de las teorías: si no es posible reproducir en varios laboratorios del mundo los resultados de una idea teórica, la misma ha de ponerse en duda, y ser reformulada. Por eso no es extraño que, poco después de la publicación del modelo BTW, científicos y laboratorios de nivel mundial se olvidaran de sofisticados láseres, máquinas de “sputtering” y aceleradores de partículas, para... ¡“jugar” con arena! La figura 7 muestra, por ejemplo, el experimento diseñado por científicos de los laboratorios de la IBM en 1990: se va agregando lentamente arena al plato de una balanza, de tal modo que las avalanchas que se producen salen por los lados, y se van midiendo por diferencia de pesos. Los autores pasaron mucho trabajo para encontrar un dispositivo que liberara granos uno a uno, y consumieron 24 horas de trabajo continuo sólo para ajustar todo el dispositivo. Las avalanchas medidas por la balanza se iban leyendo directamente en una computadora. Obsérvese que lo que hace a este experimento imposible de realizar en siglos pasados, es el uso de la *computadora*, la cual permite hacer conteos de decenas de miles de avalanchas sin la intervención humana.



Pilas de arena en la IBM (1991)

Figura 7. Experimento de IBM

En nuestra opinión, *este es un atractivo especial que posee este tipo de experimento para países como el nuestro: aquí puede hacer ciencia de frontera con dispositivos relativamente sencillos, si se usan adecuadamente las computadoras...y mucho más adecuadamente el cerebro.* Aunque el experimento de la IBM indicaba una distribución de avalanchas tipo ley de potencias sin depender siquiera mucho del tipo de granos, la distribución dejaba de comportarse así para pilas de arena de diámetro demasiado grande: la SOC, por lo visto, sólo se cumplía dentro de ciertos límites de tamaño.

Una de las consecuencias más notables de este “juego” científico, es que los cubos se *auto-organizan* de modo que se forma realmente una pila con una pendiente

de reposo, aproximadamente igual a lo que esperamos de una pila de arena real. Esta propiedad de *auto-organizarse* para lograr una propiedad macroscópica *emergente* (la pendiente crítica en nuestro caso), es una de las características distintivas de los llamados *sistemas complejos*.

Si ahora graficamos la distribución estadística de tamaños de avalanchas en este sistema, *también obtenemos una ley de potencias*. El hecho de que se obtenga esta ley de potencias –como ocurre en las llamadas transiciones críticas–, más la auto-organización del sistema que hemos descrito, dan el nombre de “*criticidad auto-organizada*” a la teoría de Bak, Tang y Wiesenfeld. Otra de las enseñanzas interesantes del modelo BTW es que el valor de la pendiente de la distribución (que es muy cercana a  $-1$ ), se mantiene prácticamente constante aunque cambiemos moderadamente los detalles de las reglas del autómata celular BTW. Se dice entonces que este modelo define una *clase de universalidad*. La *Universalidad* es otra de las características distintivas de los Sistemas Complejos.

El catalizador por excelencia del estudio de los sistemas complejos en nuestro colectivo fue y sigue siendo la difícil situación económica que sufre nuestro país desde la catástrofe del campo socialista, agravada por el bloqueo, que nos obligó a desarrollar al máximo la creatividad.

La escasez de combustible, el problema entonces más grave, se tradujo entre otras cosas en apagones intermitentes y en... bicicletas.

No nos imaginábamos al principio la implicación de la bicicleta para el estudio “tropical” de los sistemas complejos. Describiremos sólo dos anécdotas de las muchas que tenemos en la colección:

Al tratar de buscar sistemas más eficientes para la combustión, se comenzaron a usar emulsiones agua-combustible en distintos lugares. Nosotros comenzamos a estudiar el problema de la combustión de las gotas de emulsión mediante una simulación del proceso de microexplosión de una gota de combustible inyectando aire dentro de gotas de fuel-oil. *La cámara de aire era una cámara de bicicleta.*

La figura 8 muestra el montaje experimental para estudiar la fragmentación de la gota: como se ve, la gota que cuelga de un capilar es penetrada por otro capilar aún más fino por el cual se inyecta aire para romperla. Los fragmentos se coleccionan en la pared del dispositivo que es de papel acetato. Estos se cuentan luego en el microscopio y se clasifican por tamaño. Se comprobó que para presiones de inyección suficientemente grandes no hay un tamaño característica de gota en una amplia región de tamaños, o sea no se puede definir una “unidad de longitud” para caracterizar la distribución. Esto es una propiedad fractal, como ya señalamos.

La figura 9 muestra los resultados de la medición de los tamaños de las gotas. Uno de los resultados más importantes de este experimento, es que la distribución estadística de radios de gotas sigue una *ley de potencias*.

¿Qué quiere decir esto? Supongamos que realizamos muchas veces un experimento, de modo que tenemos la oportunidad de medir un gran número de gotas. Las gotas pueden ser de diversos tamaños, de modo que podríamos contar cuántas gotas de cada tamaño se han producido en nuestro experimento de rotura. En la figura 9 mostramos una representación gráfica de este conteo como resultado de varios experimentos a diferentes presiones

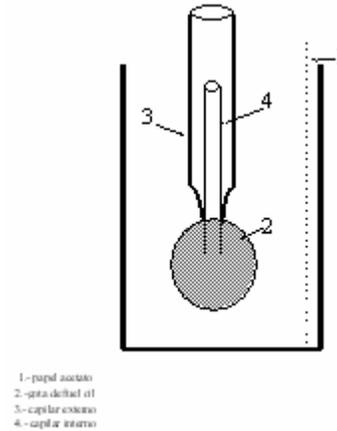


Figura. 8.- Experimento de fragmentación de gotas

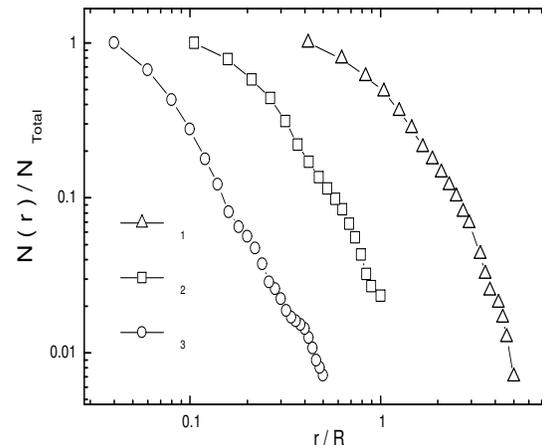


Figura.9.- Resultados del experimento de fragmentación de gotas.

Las distintas curvas, como se dijo, corresponden a distintas presiones de inyección. Se mide la cantidad de gotas acumulativa  $N(r)$  es decir el número de gotas con tamaño mayor que  $r$  en unidades de la cantidad total de gotas  $N$ , en función del tamaño relativo  $r/R$  donde  $R$  es el radio de la gota que se rompe, para distintas presiones de inyección. Obsérvese que el gráfico es logarítmico por ambos ejes y que el comportamiento de las gráficas se puede aproximar a una línea recta. (Esta aproximación es mejor en el caso de mayor presión de inyección, o sea en la curva marcada con círculos).

Una relación lineal entre logaritmos significa una *ley de potencias* entre las magnitudes, en este caso del tipo

$N(r) / N \approx (r / R)^{-\alpha}$  donde  $\alpha$  indica la pendiente en el gráfico logarítmico. Una curva así no tiene un máximo local, por lo que no se puede decir que haya un tamaño de gotas más abundante. No existe, pues, un tamaño característico de gotas en este caso. Puede verse que las gotas más pequeñas son más abundantes. Por eso, en el rango que se estudió, la distribución de gotas presenta propiedades fractales.

Las características de los sistemas críticos auto-organizados pueden modelarse con el comportamiento de las avalanchas en las lomas de arena, donde estas avalanchas muestran todas las propiedades que ya hemos mencionado en los fractales y sistemas caóticos.

La tecnología con que se estudian las lomas de arena, si bien es de lo más sencillo a nivel mundial en física, como caracteriza a los experimentos actuales en sistemas complejos, está por encima de nuestras posibilidades. Otros experimentadores han usado lomas de arroz, el cual por razones obvias ha estado fuera de nuestro alcance dada la gran cantidad de arroz necesaria para estos experimentos.

Para no hacer muy larga la historia solo diremos que nuestras lomas terminaron siendo lomas de balines de bicicleta. Los resultados esclarecieron características esenciales de la criticalidad auto organizada, y por su trascendencia fueron publicados en Physical Review Letters. Claro está que estos resultados se mencionan y detallan en clase, y se discute en lo posible resultados de otros investigadores y nuestros propios modelos y puntos de vista.

Como ya dijimos, los pioneros de brindar una “explicación” “al fenómeno de distribución según leyes de potencias fueron Bak, Tang y Wiesenfeld<sup>1</sup>, si bien en estos momentos la misma dista de satisfacer las inquietudes de muchos investigadores, nosotros incluidos, tiene la virtud de haber aventurado ideas novedosas y, en nuestra opinión, haberle dado a la física actual otro sabor, ayudando a abrir campos teóricos y experimentales de gran motivación. El autómatas celular que proponen en la ref. [1] como mecanismo universal para explicar la omnipresencia de las leyes de potencia, ha sido ya superado por otros modelos<sup>2-4</sup>, pero continúa manteniendo todo su valor pedagógico y se explica y critica en clases, entre otros.

Los experimentos y fenómenos que exhiben comportamientos con leyes de potencia y que inicialmente fueron incluidos dentro de la llamada “criticalidad auto organizada” preferimos enfocarlos con otros métodos como el empleo de formulaciones no extensivas, lo cual nos sirvió para elaborar modelos de roturas y terremotos que se discuten en clase, manteniendo el curso siempre al mayor nivel de actualidad en la investigación, cosa que los estudiantes aprecian.

Por ejemplo, estos modelos permiten introducir una ley de distribución de la energía de los terremotos que ajusta mucho mejor con las observaciones que la sacrosanta ley de Gutenberg-Richter tan venerada por los sismólogos.

La figura 10 muestra la coincidencia en todo el rango de energías para el catálogo de California entre el modelo obtenido por nosotros y la data experimental<sup>5-7</sup>.

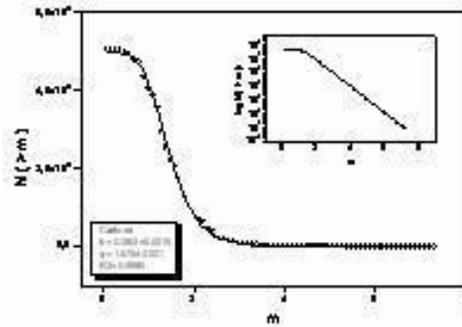


Figura 10.- Resultados del modelo no extensivo para terremotos<sup>7</sup>.

## 6 Conclusiones

Como puede verse, la tarea que nos hemos planteado con este curso es muy difícil y tiene varias facetas. Consiste en extender la *nueva forma de pensar* que implica la física de los sistemas complejos. Esta nueva forma de pensar es tan radicalmente diferente a la tradicional que puede compararse a la diferencia introducida por la física estadística o la mecánica cuántica en la física de su tiempo.

Podemos ilustrar cómo sería la transición de una a otra concepciones de la naturaleza: Un físico no versado en los aspectos de la complejidad vería un sistema mecánico macroscópico como esencialmente determinista en el sentido riguroso: “Tengo las ecuaciones del sistema, las condiciones iniciales y ya conozco el futuro del sistema que estudio”.

Este punto de vista se entronizó desde que la mecánica clásica obtuvo sus grandes éxitos en la descripción del movimiento de los cuerpos celestes e hizo patente su poder en el cálculo de mecanismos. En palabras de gran Laplace, se expresa así:

*“UNA INTELIGENCIA QUE CONOCIERA TODAS LAS FUERZAS QUE ANIMAN LA NATURALEZA, ASÍ COMO LA SITUACIÓN RESPECTIVA DE LOS SERES QUE LA COMPONEN... PODRÍA ABARCAR EN UNA SOLA FÓRMULA LOS MOVIMIENTOS DE LOS CUERPOS MÁS GRANDES DEL UNIVERSO Y LOS DEL ÁTOMO MÁS LIGERO; NADA LE RESULTARÍA INCIERTO Y TANTO EL FUTURO COMO EL PASADO ESTARÍAN PRESENTES A SUS OJOS”* (P.S. Laplace “Los Principios de la Mecánica Celeste”)

El físico de que hablamos sólo discreparía de Laplace en cuanto a los objetos cuánticos y los sistemas de muchos cuerpos, pero no en cuanto a la esencia del problema, o sea, en cuanto a la raíz y el significado del determinismo. Esta forma de pensar hay que cambiarla (y es lo que intentamos con este curso) particularmente en

cuanto al contenido conceptual del determinismo por una que puede verse reflejada en esta frase:

“...QUIÉN PUEDE CALCULAR EL TRAYECTO DE UNA MOLÉCULA? ¿QUÉ SABEMOS NOSOTROS SI LAS CREACIONES DE LOS MUNDOS NO ESTÁN DETERMINADAS POR LAS CAÍDAS DE GRANOS DE ARENA?...LO PEQUEÑO ES GRANDE, LO GRANDE ES PEQUEÑO, TODO ESTÁ EN EQUILIBRIO EN LA NECESIDAD...” (Víctor Hugo: “Los Miserables”).

Seguramente este enfoque deberá tener una incidencia positiva en la enseñanza de la física en el nivel medio. Al efecto, el trabajo de divulgación entendido de esta forma puede servir de base al desarrollo científico- pedagógico en los institutos vocacionales y de los profesores de la enseñanza media.

No esperamos que con un curso como este se formen especialistas en sistemas complejos, pero estamos seguros de que la asimilación de los materiales aquí expuestos, la familiarización con los programas de cómputo y la motivación por la aplicación de los conceptos que en los cursos se exponen a experimentos, investigaciones peda-

gógicas, y el cambio de enfoque metodológico hacia la física y su enseñanza tendrá consecuencias positivas para nuestra Ciencia.

## Bibliografía

1. P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.*, **59** 381 (1987)
2. Sotolongo-Costa, O., Moreno, Y., Lloveras, J., Antoranz, J.C. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1, 42-46 (1996).
3. Vazquez, A., Sotolongo, O., Brouers, F. *J. Phys. Soc. Jpn* **66**, 2324-2327 (1997).
4. Sotolongo-Costa, O., Vazquez, A., Antoranz, J.C. cond-matt/9806176. *Phys. Rev. E* **59**, 6, 6956-6961 (1999).
5. Sotolongo-Costa, O., Arezky H. Rodriguez, Rodgers G. J. cond-matt/002339. *Entropy* **2**, 4, 174-177 [www.mdpi.org/entropy](http://www.mdpi.org/entropy) ( dec/ 2000).
6. Sotolongo-Costa, O , Posadas, A. *Rev. Cub. F is* **19**, 1, pp 15-18, 2002.
7. Sotolongo-Costa, O , Posadas, A. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 048501 (2004).

## Complejidad: lo bueno, lo malo y lo feo

Ernesto Altshuler

Cátedra de Sistemas Complejos “Henri Poincaré”, Facultad de Física, Universidad de La Habana,  
ealtshuler@fisica.uh.cu

Recibido el 2/06/2006. Aprobado en versión final el 1/12/2006 .

**Sumario.** La Complejidad es un área fresca y dinámica de la ciencia contemporánea, pero también un etiqueta de moda: incluye, en principio, una enorme cantidad de asuntos físicos, matemáticos, biológicos e incluso sociológicos de forma supuestamente unificada. “Emergencia”, “No linealidad” y “Auto-organización” son algunos de los términos que van y vienen en este escenario, y que a veces se traen a colación sin poseer una idea clara de sus significados en el contexto original en el que fueron creados. En general, los físicos evitan esos problemas intentando definir la Complejidad de forma tan precisa como sea posible. Sin embargo, aquí ilustraré que esta es una tarea extremadamente delicada.

**Abstract.** Complexity is a fresh and dynamic branch of contemporary science, but also a fashionable label: it embraces, in principle, a huge amount of physical, mathematical, computational, biological and even sociological issues under a supposedly unified approach. “Emergence”, “Non linearity” and “Self organization” are some of the terms that come and go in this scenario; sometimes without a clear idea of what they mean in the context they were created. In general, physicists avoid such problems by trying to define Complexity as precisely as they can. However, I will show here that this is an extremely delicate task.

**Palabras clave.** Sistemas Complejos 89.75.-k, Dinámica no lineal y Caos 05.45.-a.

### 1 Introducción

Un rápido vistazo a un grupo de títulos de libros de popularización científica aparecidos en los últimos años – algunos de ellos firmados por autores muy respetables–, parecen indicar que estamos a las puertas de la más grande de las revoluciones del conocimiento humano. Invito al lector a juzgar por sí mismo: “A New Kind of Science” (Wolfram, 2002), “Sync: the emerging science of spontaneous order” (Strogatz, 2003), “How Nature Works: The Science of Self Organized Criticality” (Bak, 1996), “Small Worlds and the Groundbreaking Science of Networks (Buchanan, 2002). En un tono un tanto triunfalista, algunos han resumido esta explosión de ideas en el último de los paradigmas científicos: la llamada “Ciencia de la Complejidad” o, con un tono más académico, la “Teoría de la Complejidad”.

Pero, ¿Qué tienen en común las ideas subyacentes en

todos esos títulos, además del hecho de que sus autores son físicos o matemáticos de formación? En primer lugar, la *interdisciplinariedad*: cada uno de estos libros trata sobre grandes principios aplicables, en principio, a un extenso rango de fenómenos, que comprenden desde la Física hasta las ciencias sociales. En segundo lugar, los autores intentan colocar en términos *cuantitativos* sus ideas. En tercer lugar, la *computación* –utilizada lo mismo para modelar teóricamente que para adquirir masivamente datos del mundo real– juega un rol protagónico. Y es justamente esa tendencia a *cuantificar* las ideas en áreas interdisciplinarias de la ciencia –eventualmente mediante el uso de las computadoras– lo que, en mi opinión, intenta seriamente romper con el estilo convencional en muchas áreas del conocimiento, especialmente la Biología, la Sociología, la Lingüística, y aun la Historia y la política.

Este espíritu cuantificador no debe extrañarnos, si consideramos que, según algunos autores<sup>1</sup>, la Ciencia de

la Complejidad tiene su Génesis en el enlace de las ciencias particulares (físicas, biológicas, médicas y sociales) con la Matemática, a través de tres disciplinas. Estas disciplinas “puentes” son la teoría de Sistemas Dinámicos, la Cibernética, y la teoría General de Sistemas, cuyos precursores mayoritarios fueron físicos y matemáticos de formación, entre los que destacan Newton, Poincaré, Wiener, Von Neumann y Shannon, junto a los biólogos Von Bertalanffy y Waddington<sup>1</sup>.

Volviendo a los títulos de libros arriba enumerados, pudiera establecerse un último elemento común a todos ellos: la supuesta necesidad de un “cambio de paradigma”. En principio, algunos de sus autores propugnan que la filosofía *reduccionista* que ha protagonizado las ciencias exactas y naturales –especialmente la Física– en los últimos siglos, ha de romperse –o al menos modificarse, diría yo– a las puertas de la “Ciencia de la Complejidad”.

Quisiera terminar esta sección citando un último título grandilocuente: “Discursos y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias, relativas a la mecánica y a los movimientos locales”. A diferencia de las anteriormente citadas, esta obra data de una época antigua –1638– y su autor es considerado el padre de la ciencia moderna: Galileo Galilei. Desde luego, hay otra importante diferencia entre éste, y los títulos anteriores: “Discursos...” ha demostrado sólidamente su trascendencia a través de los siglos.

## 2 El peligro de las “palabras claves”

Un efecto colateral de la popularidad alcanzada por los libros de nuestra lista, es la entrada en escena de un grupo de palabras “claves” (o de moda) en el terreno de los llamados “fenómenos complejos”.

Desde luego, todas las disciplinas científicas poseen palabras “claves” que, por cierto, pueden ser malinterpretadas, o simplemente, falseadas, si se sacan de contexto. Por ejemplo, si en Física o en Matemática hablamos de “caos”, sabemos que estamos hablando de *un comportamiento no periódico en un sistema determinista, que exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales*<sup>2</sup> –lo cual, desde luego, se puede expresar en términos cuantitativos precisos. En el lenguaje común, “caos” significa, simplemente, “desorden”. Ésta última acepción del término “caos” en el contexto científico constituye una de las contribuciones más perniciosas a lo que pudiéramos llamar el “Efecto Torre de Babel de la Complejidad”. Pero este problema no nos debe extrañar: el caos que nos interesa exige, para ser comprendido a cabalidad, de cierto entrenamiento matemático.

Conceptos como “Sistemas dinámicos”, “Sistemas disipativos”, “No linealidad”, “Caos”, “Atractores extraños”, “Invarianza de Escala”, “Auto-organización”, “Emergencia”, “Autómata celular”, que fueron creados mayoritariamente en el seno de la Matemática y de la Física con un significado muy bien determinado, tienden

a ser utilizados de forma inexacta e, incluso, completamente errónea, al ser trasplantados a otros contextos. Estos problemas pueden tener su origen en el simple desconocimiento, pero también en el deseo de insuflar el discurso con un elegante estilo *complejo* sin tomarse el trabajo de precisar lo que se está diciendo. Y esto, en mi opinión, es extraordinariamente lesivo para los que intentan construir la “Ciencia de la Complejidad” con la mayor dignidad científica posible.

Aunque el significado de una buena parte de estos conceptos se puede encontrar rigurosamente expuesto, a nivel cualitativo, en algunas de las obras de divulgación arriba citadas (ver, por ejemplo, ref. [3]), se recomienda al lector remitirse otras referencias para una discusión más rigurosa<sup>2,4,5,6</sup>.



Figura 1. La Torre de Babel de la complejidad

## 3 Intentando definir la Complejidad

Según Boccara –en una definición que aceptaría la mayoría de los autores– son “complejos” aquellos sistemas que poseen el siguiente grupo de características<sup>6</sup>:

- Están formados por un número grande de agentes interactuantes
- Exhiben emergencia (o sea, un comportamiento colectivo, auto-organizado, difícil de predecir sobre la base del conocimiento del comportamiento de cada agente)
- El comportamiento emergente no resulta de la existencia de un “controlador central”

La aparición de propiedades emergentes difíciles de predecir, es quizás la característica más importante de los sistemas complejos. Un ejemplo es la formación de una pila de arena: si agregamos arena lentamente a una superficie horizontal, se forma una pila con un “ángulo de reposo” que define la superficie superior a lo largo de toda la pila. Sin embargo, este ángulo macroscópico está determinado por interacciones entre granos que, en primera aproximación, son de muy corto alcance: de hecho, resulta muy difícil prever la emergencia del ángulo de reposo a partir solamente del conocimiento de tales in-

teracciones. Obsérvese que, si la superficie horizontal se hace vibrar, agregando así un “ruido térmico” al sistema, no se formará una pila, sino que la arena se esparcirá horizontalmente sobre la superficie. Ésta sí es una situación predecible en el marco de la Física Estadística de equilibrio: el sistema, simplemente, trata de acomodarse a la configuración de menor energía (potencial, en este caso).

A pesar de que las condiciones (a) – (c) parecen constituir una definición razonable, ésta tiene varias debilidades serias. Por ejemplo, ¿Qué quiere decir, en la condición (b), que el comportamiento colectivo “es difícil” de predecir sobre la base del conocimiento del comportamiento de cada agente? ¿Quiere esto decir que, si tuviéramos el armamento teórico adecuado, *sí* podríamos predecir el comportamiento colectivo, tal y como podemos predecir la ecuación de estado de un gas ideal,  $pV = nRT$ , conociendo tan sólo el comportamiento de cada molécula del gas? En otras palabras, ¿es absolutamente esencial la necesidad del cambio del paradigma reduccionista, o constituye tan sólo un cambio de hipótesis de trabajo, mientras encontramos armamentos más fuertes para la predicción de comportamientos “complejos”?

Otro elemento discutible en la definición es el (a). Según Parisi, “Un sistema es complejo si su comportamiento depende crucialmente de los detalles del sistema”<sup>7</sup>. Para el autor, los “detalles del sistema” puede referirse a la forma de las ecuaciones que lo describen, o a las condiciones iniciales –en este sentido, su definición nos recuerda fuertemente la de un sistema caótico. Esta definición, además, sugiere que la pila de arena no es un sistema complejo, pues ocurre que el ángulo crítico es muy poco sensible a los detalles del sistema.

Si adoptamos esa definición, ciertos sistemas caóticos de pocos “agentes” se podrían clasificar como complejos, lo cual contrasta con el punto (a) de la definición de Boccara. Según Parisi, el cambio de paradigma que tiene lugar al tratar los sistemas complejos está relacionado con un cambio de la naturaleza de nuestro concepto de predicción: en ellos no tiene sentido intentar realizar predicciones al estilo de la mecánica de Newton-Laplace, sino sólo podemos predecir las características generales del comportamiento de determinadas “clases de sistemas”.

Al llegar a este punto, quizás sea conveniente volver al inicio, y quedarnos con una definición de Complejidad muy rudimentaria, basada en la *habilidad para describir* los sistemas, que se ilustra en la Figura 2. Si en un extremo tenemos los sistemas perfectamente ordenados (cuyo paradigma sería un material cristalino perfecto, fácilmente describable matemáticamente) y en el otro, los sistemas completamente desordenados (cuyo paradigma podría ser un gas ideal sometido a agitación térmica, también fácilmente describable matemáticamente), los sistemas complejos quedarían en una zona de “difícil descriptividad”, localizada al centro. Por ello algunos autores han definido cuantitativamente la Complejidad

de un sistema como “la mínima cantidad de información que se requiere para describirlo”, o, si se quiere, “la mínima longitud de un mensaje necesaria para describirlo”. Relacionada con esta definición existen otros conceptos contemporáneos, como el de “complejidad algorítmica”, que no discutiremos aquí. A pesar de la indudable fuerza de este tipo de definiciones, su generalidad está limitada por varios factores: dependen del *nivel de detalle* con el que se realiza la descripción, y del “idiotismo” del mensaje ó del algoritmo utilizado, por ejemplo<sup>5</sup>.

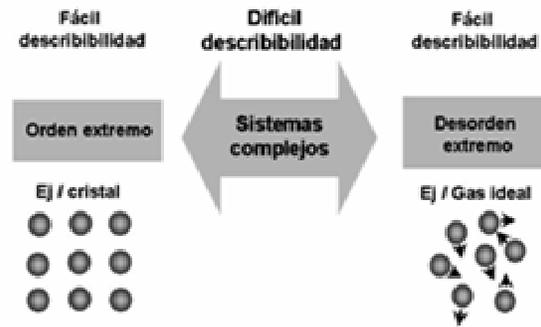


Figura 2. En busca de la definición de los sistemas complejos: una visión cualitativa.

## 4 Conclusiones

El terreno de la “Complejidad” o de los “Fenómenos Complejos” es un área interdisciplinaria fuertemente vinculada al desarrollo de la computación, que parece implicar un cambio total ó parcial en algunos paradigmas de la Física, como considerar imprescindible *reducir a sus partes* los sistemas para su estudio, y suponer que el conocimiento de las leyes individuales implica la *predictibilidad* del funcionamiento del todo. Como en toda “ciencia nueva”, no existe una definición perfecta de “Complejidad” y, mucho menos, una “Teoría de la Complejidad”.

La interdisciplinariedad inherente a la “Complejidad”, conlleva al peligro de que se falsee el significado de un grupo de términos relativamente bien definidos en los terrenos de la Matemática, la Física y la Computación, produciendo un lamentable efecto de “Torre de Babel” entre algunos científicos involucrados en el tema.

Si bien los científicos provenientes de las llamadas *ciencias exactas* han de abrir su mente a un nuevo paradigma de pensamiento al incursionar en el campo de la “Complejidad”, una de sus contribuciones mayores al tema es, sin dudas, la de mantener allí el rigor lógico y matemático que poseen por su propia formación.

## Referencias

1. R. H. Abraham “The Genesis of Complexity”, in A. Montuori (ed.) “Advances in Systems Theory, Complexity and the Human Sciences” (2002)
2. S. Strogatz “Nonlinear dynamics and chaos” (Perseus

Books Publishing, 1994)

3. P. Bak "How Nature Works: The Science of Self Organized Criticality" (Springer-Verlag, 1996)

4. G. Nicolis y I. Prigogine "Exploring Complexity: an Introduction" (W. H. Freeman, 1989)

5. Y. Bar-Yam "Dynamics of Complex Systems" (Addison-

Wesley, 1997)

6. N. Boccara "Modelling Complex Systems" (Springer-Verlag, 2004)

7. G. Parisi "Complex systems: a Physicist's viewpoint". *Physica A* 263, 557-564 (1999).

# Redes complejas: una perspectiva simple

R. Mulet

Cátedra de Sistemas Complejos Henri-Poincaré, Universidad de la Habana; Dpto. de Física Teórica, Facultad de Física Universidad de la Habana, CP 10400 La Habana, Cuba.

**Sumario.** En este trabajo hacemos una pequeña introducción al tema de las Redes Complejas. Describimos sus principales características, especialmente sus diferencias con las redes aleatorias. Discutimos algunos de los problemas físicos más estudiados en relación a las redes complejas en especial algunos vinculados a las Ciencias de la Computación y presentamos algunas preguntas aún abiertas en el tema. Finalmente, proponemos algunas perspectivas de investigación futura en este tema

**Abstract.** In this work we make a short introduction to the subject of Complex Networks. We describe its most important characteristics, mainly their differences with random networks. We also discuss some of the most studied physical problems related with these networks, especially those related with the Computer Sciences and we present some open questions. Finally we propose some perspectives for further research.

## Introducción

Un grafo puede definirse de manera simple usando dos conjuntos. A uno lo llamaremos el conjunto de los vértices  $V$ , y al otro el conjunto de los ejes  $E$  a cada par de vértices le haremos corresponder un eje. A la unión de estos conjuntos  $(V,E)$  es a lo que llamamos un grafo. Sin embargo, esta definición precisa es demasiado abstracta, y el lector agradecerá seguramente un par de ejemplos ilustrativos. Por ejemplo, podemos llamar vértices a todas las casas de Ciudad de la Habana, y enlaces a los cables eléctricos que las unen, esa estructura es un grafo. También podemos imaginarnos un caso mucho más simple. En una red de pescar, los nudos son los vértices del grafo y las cuerdas de nudo a nudo los enlaces. En un ambiente más científico, podemos imaginarnos el grafo de computadoras que están conectadas a Internet. Las computadoras constituyen los vértices del grafo y las conexiones entre ellas los ejes.

Podríamos seguir enumerando ejemplos, pero preferimos llamar la atención sobre el hecho de que el carácter abstracto de la definición le da al concepto de grafo la posibilidad de ser útil en una amplia gama de problemas. En particular, en este trabajo nosotros vamos a concentrarnos en algunas aplicaciones que han visto la luz en los últimos años.

Comencemos primero llamando la atención sobre el

hecho de que desde que sabemos que la materia está conformada por átomos los físicos trabajamos con grafos. Sólo que en general estos grafos tienen una estructura muy simple.

En Ciencia de Materiales suelen tener nombres como estructuras Cúbicas, Monoclínicas, Cúbica centrada en las caras, Ortorrómbicas, etc. Durante muchos años la Cristalografía se ocupó del estudio de este tipo de grafos que en general llamamos redes cristalinas. Quizás la enseñanza más importante que hemos obtenido de estos estudios es que muchas veces basta conocer el tipo de red cristalina que forman un conjunto de átomos para predecir muchas de sus propiedades. Es justamente con esta filosofía con la que enfrentamos hoy el estudio de las llamadas redes complejas.

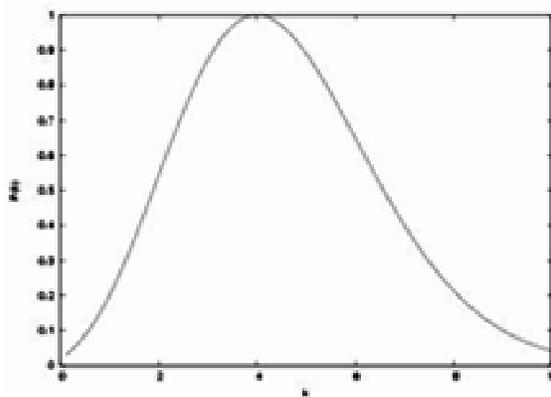


Figura 1. Distribución Poissoniana de Conectividades

## Grafos Aleatorios

Antes de ir a estudiar con más detalle las redes complejas, detengámonos en un concepto importante. El grafo aleatorio, o grafo de Erdos-Renyi.<sup>1</sup>

La manera más simple de definirlo es mediante su construcción. Imaginemos primero un conjunto de  $N$  vértices. Escojamos uno tras otro cada par de vértices y coloquemos entre ellos un enlace con una probabilidad  $p$ . Si  $N$  es suficientemente grande, obtendremos un grafo con un número de enlaces  $pN(N-1)/2$ .

Estos grafos han sido extensamente estudiados en la literatura y es difícil imaginar una propiedad razonablemente interesante que no este calculada con un nivel de rigor adecuado. Por ejemplo, es bien conocido que la distribución de conectividades de este grafo sigue una distribución de Poisson (figura 1), con media  $p N$ . Esto quiere decir que si estudiamos cuál es la probabilidad de que un vértice o nudo tenga una conectividad  $k$ ,  $P(k)$  tendrá un máximo para  $k=p N$ . Note la diferencia con las redes cristalinas donde la conectividad es siempre fija, por ejemplo en la red cúbica es siempre 6.

Otra diferencia importante entre estos grafos y las redes cristalinas es la presencia de lazos. En los grafos aleatorios un lazo, o sea, el número de sitios que debo

visitar partiendo de un punto dado antes de regresar a él mismo siguiendo sólo los enlaces de la red, es del orden red cuadrada es de orden  $O(1)$ . Esto, como veremos más adelante tiene implicaciones concretas en toda una serie de fenómenos interesantes.

Conocidas estas propiedades de los grafos, esencialmente matemáticas. La próxima pregunta que debe hacerse un físico es que sucede si uno estudia problemas "sobre estos grafos". Por ejemplo, un problema muy conocido y no resuelto de la física del magnetismo es el cálculo de la función de partición del hamiltoniano de Ising<sup>4</sup>:

$$H = -J \sum_{i,j} S_i S_j$$

en 3 dimensiones. La dificultad a la hora de buscar una solución radica esencialmente en los lazos cortos que posee el sistema en 3 dimensiones. Luego, una primera aproximación para entender este tipo de problemas consiste precisamente en resolverlo en un grafo sin este tipo de lazos (por tanto, un lazo aleatorio) donde la conectividad media sea 6, como en el caso de una red cúbica.

En este caso, el interés de enfrentar este problema en un grafo aleatorio parece derivarse explícitamente de nuestra incapacidad para resolver el modelo anterior en una red cristalina. Sin embargo no siempre es así. Por ejemplo, el estudio del siguiente hamiltoniano de Potes

$$H = J \sum_{i,j} \delta(S_i, S_j)$$

en un grafo aleatorio es de sumo interés en la Ciencia de la Computación. Si las variables  $S$  pueden tomar  $q$  valores que llamamos colores, el estado fundamental del hamiltoniano anterior es aquel que garantiza que sitios conectados posean colores diferentes. El problema que uno se plantea es entonces el siguiente: ¿Es posible con  $q$  colores colorear un grafo de conectividad  $c$ , de tal suerte que 2 vértices vecinos nunca posean el mismo color<sup>3</sup>?

Estos son solo dos ejemplos que demuestran como la Física y en particular la Física Estadística ha estado constantemente vinculada al estudio de este tipo de sistemas y explica el porque del interés de esta misma comunidad en el estudio de lo que hoy conocemos como redes complejas.

## Redes Complejas

La definición de red compleja<sup>2</sup>, lamentablemente es mucho menos precisa que la que pudimos dar para grafo aleatorio, y contiene sin duda alguna un factor cultural. En general, la comunidad de investigadores reconoce como un grafo complejo a aquel que posea una distribución de conectividades que asemeje a una ley de potencia (figura 2). Algunos piden que esa potencia sea exactamente 1, otros simplemente piden que la distribución sea lo suficientemente "larga" para no poder describirla mediante una ley de Poisson.

En este caso, el concepto de complejo es bastante ambiguo y no está asociado a nuestra incapacidad de describir matemáticamente estas redes con las herramientas que conocemos. Al contrario, es más bien discriminatorio. Aquello que no pertenece al mundo de los grafos

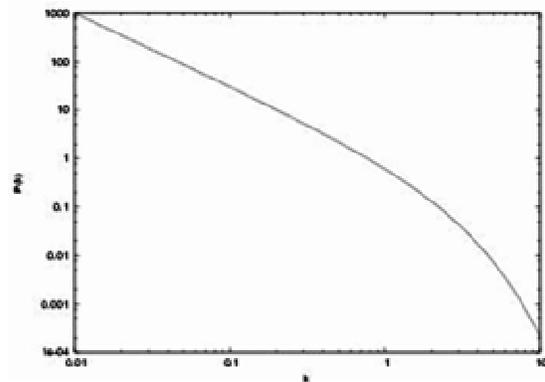
aleatorios o de las redes cristalinas y regulares es complejo.

Esto por supuesto crea una serie de problemas prácticos a la hora de enfrentar su estudio. Por ejemplo, mientras un grafo aleatorio de conectividad  $C$  está bien definido, un grafo complejo de exponente crítico  $\mu$  no. Grafos complejos, contruidos mediante algoritmos diferentes pueden tener la misma distribución de conectividades pero al mismo tiempo diferente tamaño de los lazos. O sea, no son estadísticamente equivalentes.

Esta ambigüedad refleja el hecho de que nos encontramos en un estado inicial de comprensión de estos sistemas y no le resta importancia a su estudio, al contrario. El interés en el estudio de las propiedades de los mismos está muy lejos de ser académico. Mientras que hasta hace poco más de 10 años se pensaba que los grafos que encontrábamos en la naturaleza eran aleatorios, los investigadores hoy están convencidos de que esto no es cierto.

El caso paradigmático es Internet. Si consideramos las páginas web, como los vértices de un grafo y los enlaces virtuales entre ellas como los enlaces del grafo, no es muy difícil de imaginar porque la distribución de conectividades sigue una ley de potencia. Páginas como Yahoo, Google y Hotmail son referenciadas muchas veces a través de la red (alta conectividad), mientras que la inmensa mayoría de las páginas son prácticamente invisibles, no aparecen nunca referenciadas (baja conectividad).

Una vez que aceptamos este hecho estrictamente experimental nos podemos hacer nuevas preguntas, por ejemplo: ¿es esta red más estable que una red aleatoria? La respuesta es Si, si los ataques para destruirla ocurren de manera aleatoria en la red, No, si están dirigidos a nodos altamente conectados.



**Figura 2.** Distribución "ancha" de conectividades. Ley de potencia

Otros ejemplos de redes complejas bien documentadas experimentalmente son: las redes de interacción proteína-proteína, las redes físicas de computadoras, las redes de contactos sexuales en una población, etc. Entonces asalta inmediatamente una duda, si este fenómeno es tan abundante en la naturaleza: ¿existe algún mecanismo general que permita explicar la aparición de las

mismas? La respuesta por el momento no es definitiva. Existen varias propuestas para justificar este tipo de mecanismo, pero ninguna es realmente completamente satisfactoria. Probablemente con los años encontraremos que hay varios mecanismos elementales capaces de justificar esta abundancia. Algunos serán válidos para determinados tipos de redes y otros para otras.

## Perspectivas

En los últimos años el estudio de lo que aquí llamamos redes complejas ha llamado la atención de una enorme comunidad de investigadores. Más allá de las ambigüedades asociadas a su definición, hay un conjunto grande de propiedades que conocemos y un conjunto grande de fenómenos que sabemos encontraremos en estas redes que no estaban presentes en las redes aleatorias. Por ejemplo, la transmisión de un virus en una red aleatoria ocurre solo si la conectividad media de la misma es suficientemente alta. Cuan alta debe ser esta conectividad, dependerá del mecanismo de transmisión, pero es un hecho que por debajo de cierto valor umbral el virus dejará de transmitirse. Por el contrario, en una red compleja, esto no es necesario, la conectividad media (siempre que esta pueda definirse) puede ser tan baja como se quiera pero la probabilidad de transmisión siempre será mayor que cero. No es difícil imaginarse las implicaciones prácticas de este fenómeno.

Sin embargo, las nuevas líneas de trabajo se mueven en dos direcciones diferentes. Una trata de comprender

las propiedades dinámicas asociadas a este tipo de red. Por ejemplo, un conjunto de osciladores inter-actuantes situados en los vértices de una red compleja se acoplará más o menos fácilmente que si estuviera en una red aleatoria. La otra trata de estudiar también las propiedades de la red, pero asumiendo que los ejes son diferentes. Por ejemplo, si los enlaces poseen una propiedad que llamamos resistencia al paso de la corriente: ¿es más o menos eficiente la transmisión de corriente en una red compleja que en una aleatoria? ¿De qué depende esta eficiencia?

No olvidemos, sin embargo que la idea fundamental, detrás de estas preguntas es obtener respuestas generales. Fue así cuando descubrimos que la materia estaba compuesta por átomos y luego cuando estudiamos los grafos aleatorios. Estas redes con distribuciones de conectividades anchas existen, que propiedades de las mismas podemos predecir, sin necesidad de ir a mirarlas una por una, será por muchos años, un tema fascinante y de intensa actividad científica.

## Referencias

1. B. Bollobas, *Random Graphs*, Academic Press: New York (1986)
2. R. Albert and A.L. Barabasi, *Reviews of Modern Physics* 74, 47 (2002)
3. R. Mulet, A. Pagnani, M. Weigt and R. Zecchina, *Phys. Rev. Lett.* 89, 268701 (2002)
4. J. P. Sethna, *Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters and Complexit*, Oxford University Press (2006).