

Í N D I C E

ANALISIS CUANTITATIVO DEL SISTEMA DE CONTROL DE LA FRECUENCIA CARDIACA Sánchez Catasús, Carlos A. y Anastasio A. Cabrera Santos	3
SOLUCION FUNDAMENTAL Y FUNCION DE GREEN PARA LA ECUACION DE LAS OSCILACIONES PEQUEÑAS EN UN FLUIDO VISCOSO COMPRESIBLE Marín Antuña, José y Oscar Sotolongo Costa	13
OSCILACIONES NO ESTACIONARIAS DE UN FLUIDO VISCOSO COMPRESIBLE PARA UNA EXCITACION PERIODICA ESPACIAL Marín Antuña, José	20
RESONANT INTERNAL FIELD EMISSION IN QUANTUM WELLS Dios Leyva, M. de y J. López Gondar	30
OBTENCION DE CRISTALES DE KDP PARA LA GENERACION DE SEGUNDOS ARMONICOS OPTICOS Rodríguez, Rolando; Federico L. Falcón; Carlos Arencibia; Humberto Mesa y Elsa Hernández	37
TRES MODELOS PARA LA CURVA TENSION-HUMEDAD EN ALGUNOS TIPOS DE SUELOS Ruiz Pérez, María Elena; Angel Utset Suástegui; Andrés Lau Quan; Julián Herrera Puebla y María Antonia Llanos	45
PROPIEDADES CINETICAS DE LOS PORTADORES DE CORRIENTE EN ALEACIONES DE $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0 < x < 0.12$) DOPADAS CON ESTAÑO Ivanov, G.A. y J.A. Capó Sánchez	51
LASER CON GEOMETRIA DE FILAMENTO (STRIPE) EN ESTRUCTURAS OBTENIDAS POR EPITAXIA LIQUIDA EN REGIMEN DE BAJA TEMPERATURA CON ESPESOR DE CAPA ACTIVA SUBMICRONICA Purón Sopeña, Esperanza	58
MOVILIDADES ELECTRONICAS LIMITADAS POR MECANISMOS DE DISPERSION FONONICA EN SISTEMAS SEMICONDUCTORES DE BAJA DIMENSIONALIDAD León, H.; J. Tutor; F. Comas y C. Trallero	64
MONTAJE DE UN SISTEMA PARA LA DETERMINACION DEL ANCHO DE LINEA DE RESONANCIA FERROMAGNETICA Iglesias Cerveto, A.; A. González Arias e I.V. Guerasimenko	78

MOVILIDADES ELECTRONICAS LIMITADAS POR MECANISMOS DE DISPERSION FONONICA EN SISTEMAS SEMICONDUCTORES DE BAJA DIMENSIONALIDAD

H. León, J. Tutor, F. Comas y C. Trallero, Departamento de Física Teórica,
Universidad de La Habana

RESUMEN

En el presente trabajo se muestra un estudio sistematizado de las movi-
lidades electrónicas, limitadas por diferentes mecanismos de dispersión
fonónica, en heteroestructuras semiconductoras de baja dimensionalidad.
La interacción electrón-fonón se considera para la rama acústica a través
del potencial de deformación (DP) y del acoplamiento piezoeléctrico (PZ);
así como para la rama óptica polar (OP) y no polar (ONP). La movilidad
óhmica y la movilidad Hall son calculadas en el límite cuántico dimen-
sional (cuando que se supone que sólo existe una subbanda) y conside-
rando el caso de no degeneración del gas electrónico. El apantallamiento
de la interacción no es tenido en cuenta. Se discute el caso particular
de sistemas hechos de heterojunturas de GaAs/AlGaAs y se llega a la
conclusión que a bajas temperaturas el mecanismo DP es dominante, aunque
el PZ aporta una contribución finita, cuando otros mecanismos (en especial
la dispersión por impurezas) pueden ser obviadas.

ABSTRACT

This work is devoted to a systematic investigation of phonon-limited
electron mobilities in low-dimensional semiconductor heterostructures.
Electron-phonon interaction is considered for acoustic branches, via

deformation potential (DP) and piezoelectric (PZ) couplings; as well as for polar optical (OP) and non-polar optical (ONP) branches. Ohmic and Hall mobilities are calculated in the size quantum limit (SQL) for low carrier concentration, assuming non-degenerate statistic and neglecting screening effect. The special case of GaAs/AlGaAs heterostructures is discussed, and the conclusion is drawn that DP mechanism dominates, although the PZ one gives a finite contribution, at low temperatures when other mechanisms (specially ion impurity scattering) can be neglected.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los fenómenos de transporte en heteroestructuras semiconductoras cuasiunidimensionales (Q1D) y cuasibidimensionales (Q2D) atrae la atención de numerosas investigaciones debido a las novedosas características que estos revelan en tales sistemas. En particular, la posibilidad de construir dispositivos semiconductores de alta velocidad se ha acercado a la realidad luego de obtenerse experimentalmente movi- lidades electrónicas muy altas ($\approx 5 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{V-s}$) en sistemas formados con GaAs/AlGaAs, lo cual se ha logrado gracias al uso de dopado modulado, la inclusión de capas espaciadoras y el alto grado de limpieza en los procesos de crecimiento /1-4/. Todo esto redundo en la supresión del mecanismo de dispersión por impurezas, cargadas o no, y es por ello que la interacción electrón-fonón queda como la más relevante (aunque no es la única), sobre todo a partir de temperaturas ligeramente superiores a varios Kelvin. El transporte paralelo a las heterojunturas se ha tratado ampliamente (pero no lo suficiente) sobre la base de la teoría cuasiclásica fundamentada en la ecuación cinética de Boltzmann (BTE: Boltzmann Transport equation). En particular, la solución de esta en la aproximación del tiempo de relajación (RT: relaxation time) ha permitido calcular las movi- lidades para campos débiles en numerosos trabajos, como los citados en /5/. Este último artículo está dedicado a un estudio sistematizado de los RT de electrones dispersados por fonones acústicos, a través del acoplamiento por potencial de deformación (DP) o piezo- eléctrico (PZ), así como por fonones ópticos, no polares (ONP) o polares (OP), en sistemas Q1D y Q2D del tipo de *alambres cuánticos* y *pozos cuánticos* respectivamente. En el marco del modelo usado en /5/, que será esbozado en el epígrafe 2, han sido calculadas movi- lidades (entiéndase movi- lidad óhmica a menos que se aclare otra cosa) tanto en el caso Q1D /6,7/ como en el Q2D /8-12/. Sin embargo, el cuadro no estuvo completo hasta que recientemente el papel del acoplamiento PZ fue establecido /13/ utili- zando ese mismo modelo.

El presente trabajo constituye una continuación inmediata de nuestro artículo anterior /5/ y tiene como principal objetivo hacer un resumen

sistematizado de las movibilidades limitadas por los mecanismos de dispersión antes mencionados (DP, PZ, ONP y OP), que permita establecer analogías y sacar conclusiones de utilidad para los experimentos. Nos limitamos a considerar el gas electrónico no degenerado y despreciamos el apantallamiento de las interacciones; asimismo calculamos en el límite cuántico dimensional (SQL: size quantum limit). En el epígrafe 2 esbozamos los cálculos y presentamos las expresiones obtenidas. La discusión de los resultados y las conclusiones aparecen en el epígrafe 3.

2. MOVILIDADES EN APROXIMACIÓN SQL

Recordemos brevemente el modelo utilizado en /5/ para calcular los RT de electrones dispersados por los distintos tipos de fonones estudiados. El confinamiento electrónico se modela por potenciales rectangulares infinitos y se consideran subbandas parabólicas e isotropas. Los correspondientes hamiltonianos de interacción electrón-fonón son exactamente los del caso volumétrico (3D), deducidos en la aproximación de onda larga, no dispersiva, para los fonones y aceptando que la interacción es isotropa. El factor de forma que aparece en los elementos matriciales es calculado en la aproximación de conservación del momento (MCA: momentum-conservation approximation), cuya validez se discute en ese trabajo. La rapidez de transición entre dos estados cualesquiera se calcula de acuerdo con la regla de oro de Fermi. Por último los correspondientes RT se hallan en una *aproximación elástica*, muy buena para los fonones acústicos, pero no así para los ópticos. Efectivamente, la energía de un fonón óptico $\hbar\omega_0$ no es despreciable en comparación con la energía del electrón dispersado; por lo tanto tal aproximación sólo es aceptable a muy bajas ($K_B T < \hbar\omega_0$) o muy altas ($K_B T \gg \hbar\omega_0$) temperaturas /14/. No obstante, en todos los artículos citados dicha aproximación ha sido usada, y así lo haremos como un primer paso que nos debe indicar cualitativamente la dependencia con la temperatura.

En la aproximación SQL, cuyos límites de validez fueron discutidos en /5/, se supone que sólo existe la primera subbanda (por tal razón en lo sucesivo obviamos los subíndices innecesarios). Supondremos que las concentraciones de portadores son suficientemente pequeñas para considerar el gas electrónico no degenerado, incluso a bajas temperaturas, y despreciar el apantallamiento de la interacción electrón-fonón /14/. Al resolver la BTE en la aproximación del RT hemos supuesto que el campo eléctrico externo es débil, por tanto es válida la ley de Ohm y resulta fácil obtener para la movilidad:

$$\mu = \frac{e}{m K_B T} \left\{ \sum_{\vec{k}''} E_{\vec{k}''} \tau(E_{\vec{k}''}) \exp \left[- \frac{E_{\vec{k}''}}{K_B T} \right] \right\} \times$$

$$x \left\{ \sum_{\vec{k}_n} \exp \left[- \frac{E_{k_n}}{K_B T} \right] \right\}^{-1}, \quad (1)$$

mientras que para la movilidad Hall:

$$\mu_H = \frac{e}{m} \left\{ \sum_{\vec{k}_n} E_{k_n} \tau^2(E_{k_n}) \exp \left[- \frac{E_{k_n}}{K_B T} \right] \right\} x$$

$$x \left\{ \sum_{\vec{k}_n} E_{k_n} \tau(E_{k_n}) \exp \left[- \frac{E_{k_n}}{K_B T} \right] \right\}^{-1} \quad (2)$$

esta última sólo para el caso Q2D. La notación coincide con la de /5/, excepto para el RT, que aquí simbolizamos como τ . Debemos destacar que en las referencias /6,7/ la expresión para calcular la movilidad conduce a resultados incorrectos, pues allí se coloca la energía total ($E = E_{k_n} + E_{k_\perp}$) en lugar de la energía asociada al movimiento cuasiclásico paralelo a las HJ (E_{k_n}).

Con el fin de simplificar las expresiones introducimos las energías relativas:

$$\alpha = \frac{E_{oa}}{K_B T}, \quad \beta = \frac{E_{ob}}{K_B T}, \quad R = \frac{\hbar \omega_o}{K_B T} \quad \text{y} \quad \xi = E_{k_n} / K_B T; \quad (3)$$

donde E_{oa} (E_{ob}) es la energía básica en un pozo rectangular infinito unidimensional de ancho a (b). También introducimos las movilidades relativas.

$$Z_1 = \frac{\mu_1}{\mu_3}, \quad Z_2 = \frac{\mu_2}{\mu_3} \quad \text{y} \quad Z_H = \frac{\mu_H}{\mu_3}; \quad (4)$$

donde el subíndice 1 (2) indica el caso Q1D (Q2D); μ_3 es la movilidad para el gas no degenerado en el caso 3D (dependiente de la temperatura). Para cada mecanismo en particular μ_1 y μ_2 se calculan concretando los correspondientes RT presentados en /5/. Conviene por último introducir la notación siguiente:

$$\langle f \rangle = \int_0^\infty \xi f e^{-\xi} d\xi, \quad (5)$$

para simbolizar algunas integrales analíticamente intratables, que aparecen como resultado de promediar estadísticamente los RT.

Debe quedar bien claro que cuando se considera que varios mecanismos actúan simultáneamente el RT resultante es calculado como sigue:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{DP}} + \frac{1}{\tau_{PZ}} + \frac{1}{\tau_{ONP}} + \frac{1}{\tau_{OP}}, \quad (6)$$

aceptando que los mecanismos OP y ONP son también elásticos. Este RT resultante se sustituye en (1) y se halla la movilidad combinada (llamémosla así pues es el resultado de la combinación de dos o más mecanismos). La regla de Mathiessen usada en /8/ no es una buena aproximación.

a) MOVILIDAD DP

Para la movilidad limitada por fonones acústicos a través del acoplamiento DP tenemos /14/:

$$\mu_3^{DP} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \frac{e \rho s_L^2 \hbar^4}{D_{ac}^2 m^{5/2} (K_B T)^{3/2}}, \quad (7)$$

donde D_{ac} es el potencial de deformación acústico, ρ la densidad del material y s_L la velocidad de propagación del modo longitudinal.

En el caso Q1D obtenemos:

$$Z_1^{DP} = \frac{\pi}{3} (\alpha\beta)^{-1/2}, \quad (8)$$

expresión que difiere de la reportada en /6,7/, como era de esperar según nuestro comentario que sigue a (2).

En el caso Q2D obtenemos:

$$Z_2^{DP} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\alpha}, \quad (9)$$

expresión que coincide con la reportada en /10/. Fácilmente se comprueba que $Z_H^{DP} = Z_2^{DP}$.

b) MOVILIDAD PZ

Para la movilidad limitada por fonones acústicos a través del acoplamiento PZ tenemos /14/:

$$\mu_3^{PZ} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \frac{\hbar^2}{\bar{\Gamma} e m^{3/2} (K_B T)}; \quad (10)$$

donde como resultado de un promedio espacial /5, 14/, introducimos

$$\bar{\Gamma} = \frac{64 \pi^2 \gamma^2 \epsilon^{-2}}{15 \rho} \left(1/s_L^2 + 2/s_T^2 \right); \quad (11)$$

y así tenemos una variante isótropa de esta interacción, siendo γ el módulo piezoeléctrico, ϵ la permitividad estática y s_T la velocidad de propagación del modo longitudinal.

En el caso Q1D obtenemos:

$$Z_1^{PZ} = 3\pi(\alpha\beta)^{-1/2} \langle F_1^{-1} \rangle; \quad (12)$$

donde .

$$F_1 = \frac{1}{\alpha+\beta+\xi} + \frac{2}{\alpha+\xi} + \frac{2}{\beta+\xi} + \frac{4}{\xi} , \quad (13)$$

expresión que difiere de la reportada en /7/ por las razones ya expuestas a propósito de (1).

En el caso Q2D obtenemos:

$$Z_2^{PZ} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi/\alpha} < \xi F_2^{-1} > , \quad (14)$$

donde:

$$F_2 = 3 - 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\xi}} ; \quad (15)$$

mientras que la movilidad Hall relativa es:

$$Z_H^{PZ} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi/\alpha} \frac{< \xi^2 F_2^{-2} >}{< \xi F_2^{-1} >} . \quad (16)$$

c) MOVILIDAD ONP

Para la movilidad limitada por fonones ópticos no polares conviene tomar, por razones de sencillez, la expresión asintótica de μ_3 para altas temperaturas /4/:

$$\mu_3^{ONP} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e \rho s^2 \hbar^4}{E_{do}^2 m^{5/2} (K_B T)^{3/2}} , \quad (17)$$

donde E_{do} es el potencial de deformación óptico y $s^{-2} = s_L^{-2} + 2s_T^{-2}$ para un cristal de simetría cúbica con dos átomos por celda elemental (este detalle debe ser corregido en nuestro trabajo anterior /5/).

En el caso Q1D obtenemos

$$Z_1^{ONP} = \frac{2\pi}{3} (\alpha\beta)^{-1/2} < G_1 > , \quad (18)$$

donde (introduciendo la distribución de Bose-Einstein N_O):

$$G_1 = \frac{\xi^{-3/2}}{N_O (\xi+R)^{-1/2} + (N_O+1) (\xi-R)^{-1/2} \Theta(\xi-R)} . \quad (19)$$

En el caso Q2D obtenemos:

$$Z_2^{ONP} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\alpha} R^{-1} < G_2^{-1} > ; \quad (20)$$

donde:

$$G_2 = N_O + (N_O+1) \Theta(\xi-R) , \quad (21)$$

siendo $\Theta(\xi-R) = 1$ ($=0$) si $\xi > R$ ($\xi < R$). La movilidad Hall relativa es:

$$Z_H^{ONP} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\alpha} R^{-1} \frac{< G_2^{-2} >}{< G_2^{-1} >} . \quad (22)$$

d) MOVILIDAD OP

Para la movilidad limitada por fonones ópticos polares conviene tomar, otra vez por razones de sencillez, la expresión asintótica de μ_3 para altas temperaturas /5/:

$$\mu_3^{OP} = \frac{4}{3} \sqrt{2/\pi} \frac{\hbar^2 \epsilon^*}{e m^{3/2} (K_B T)^{1/2}}, \quad (23)$$

donde $1/\epsilon^* = \frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0}$, siendo ϵ_0 (ϵ_∞) la permitividad estática (de alta frecuencia).

En el caso Q1D obtenemos:

$$Z_1^{OP} = 67 (\alpha\beta)^{-1/2} R^{-1} < \xi^{-1/2} K^{-1} >, \quad (24)$$

donde

$$K = N_0 (\xi+R)^{-1/2} L^+ + (N_0+1) (\xi-R)^{-1/2} L^- \Theta (\xi-R), \quad (25)$$

$$L^\pm = \sum_{n,m=0}^1 (1+n)(1+m) \frac{B_{nm} \pm R}{(B_{nm} \pm R)^2 + 4 \xi B_{nm}}, \quad (26)$$

$$B_{nm} = [1+(-1)^n] \alpha + [1+(-1)^m] \beta. \quad (27)$$

En el caso Q2D obtenemos:

$$Z_2^{OP} = \frac{3}{2} \sqrt{\pi/\alpha} R^{-1} < \xi Q_2^{-1} >; \quad (28)$$

donde:

$$Q_2 = N_0 [1-B^+] + (N_0+1) [1-B^-], \quad (29)$$

y a su vez:

$$B^\pm = \frac{4 \alpha \pm R}{[16 \alpha^2 + 16 \alpha \xi \pm 8 \alpha R + R^2]}. \quad (30)$$

La movilidad Hall relativa es:

$$Z_H^{OP} = \frac{3}{2} \sqrt{\pi/\alpha} R^{-1} \frac{< \xi^2 Q_2^{-2} >}{< \xi Q_2^{-1} >}. \quad (31)$$

e) MOVILIDAD COMBINADA DP Y PZ

Es un hecho bien conocido que a bajas temperaturas ($T < 100$ K) la movilidad está limitada fundamentalmente por los fonones acústicos, y se puede despreciar la dispersión por fonones ópticos /1/. Por otro lado a estas temperaturas es que se logran los valores más altos de

movilidad /1-14/. Es por estas razones que tiene sentido investigar la movilidad limitada por los acoplamientos DP y PZ simultáneamente. En el caso Q1D se obtiene:

$$\mu_1 = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2} (\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} \mu_3^{\text{DP}} \mu_3^{\text{PZ}} \times \int_0^\infty \frac{\xi e^{-\xi}}{F_1 \mu_3^{\text{DP}} + \frac{9}{2} \sqrt{2} \mu_3^{\text{PZ}}} d\xi ; \quad (32)$$

mientras que en el Q2D:

$$\mu_2 = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-1} \mu_3^{\text{DP}} \mu_3^{\text{PZ}} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-\xi}}{F_2 \mu_3^{\text{DP}} + \frac{3}{2} \mu_3^{\text{PZ}} \xi} d\xi , \quad (33)$$

donde todos los parámetros han sido definidos anteriormente.

3. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con el propósito de ilustrar los resultados obtenidos haremos los gráficos correspondientes a las movilidades limitadas por fonones acústicos, a través de los acoplamientos DP y PZ.

En la Figura 1 se muestran las movilidades relativas limitadas por el mecanismo DP. Aparecen Z_1^{DP} para $\alpha=\beta$ (línea continua fina) y Z_2^{DP} (línea continua gruesa) en función de α^{-1} (en el intervalo donde es aceptable la aproximación SQL, según se discutió en /5/). En la Figura 2 todo es similar a la Figura 1, pero para el mecanismo PZ; aparece además la movilidad Hall relativa Z_H^{PZ} (línea discontinua). Una discusión bien detallada de estos resultados se encuentra en /13/, por lo que no lo repetiremos. Destaquemos solamente cuatro aspectos: la movilidad crece con el ancho del pozo (note que $\alpha^{-1} \sim a^2$) siempre que este último se mantenga en el rango de validez de la aproximación SQL ($\alpha^{-1} \leq 3$) la movilidad en el caso Q1D es mayor que en el caso Q2D sólo a partir de cierto valor de α^{-1} , o sea de ancho del pozo, y alcanza a ser entre 3 y 3,5 veces mayor; para el mecanismo PZ el factor Hall $\mu_H^{\text{PZ}}/\mu_2^{\text{PZ}}$ llega a ser igual a 1,38; y, por último, las expresiones asintóticas para el mecanismo PZ dan buenos resultados para pequeños valores de α^{-1} ($\alpha^{-1} \leq 0,08$).

La dependencia con la temperatura conviene analizarla en las gráficas de movilidad absoluta. Para el GaAs hemos tomado los mismos valores de los parámetros que en /13/. Tomando $a = b = 100 \text{ \AA}$ obtenemos que, por ejemplo, $\mu_1^{\text{PZ}} \geq \mu_2^{\text{PZ}}$ cuando $T \geq 192 \text{ K}$, y $\mu_2^{\text{PZ}} \geq \mu_3^{\text{PZ}}$ cuando $T \geq 212 \text{ K}$. De acuerdo con (8), (12) y (32) las dependencias con la temperatura de μ_1^{DP} (línea fina continua) μ_1^{PZ} (línea discontinua) y μ_1 (línea gruesa) se muestran en la Figura 3 para $a = b = 100 \text{ \AA}$. La movilidad PZ aumenta con la temperatura en contraste con el resultado de /7/. La movilidad DP decrece con la temperatura, al igual que en /6,7/, pero ahora como $T^{-\frac{1}{2}}$. Las

diferencias con estos trabajos citados se explican por nuestro comentario que sigue (2). La movilidad combinada está limitada principalmente por el mecanismo DP, aunque el PZ aporta una contribución finita. De acuerdo con (9), (14) y (33) las dependencias con la temperatura de μ_2^{DP} (línea fina continua), μ_2^{PZ} (línea discontinua) y μ_2 (línea gruesa continua) se muestra en la Figura 4 para $a = 100 \text{ \AA}$. La movilidad PZ decrece con la temperatura en concordancia con los resultados de /11/. La movilidad DP decrece con la temperatura como T^{-1} , exactamente igual que en /10/. En este caso también el mecanismo DP es el principal que limita la movilidad combinada, aunque el PZ aporta una contribución finita. Una discusión más detallada de estos resultados se puede encontrar en /13/.

En relación con las movilidades ópticas sólo queremos dar una idea de lo que significan temperaturas muy bajas y muy altas. Para el GaAs $\hbar\omega_0 = 35,3 \text{ meV}$ de modo que $\hbar\omega_0/k_B \approx 410 \text{ K}$. Así, temperaturas muy bajas significan $T < 40 \text{ K}$; mientras que muy altas $T > 4000 \text{ K}$ (obviamente estas últimas carecen de sentido práctico).

Finalmente quisiéramos hacer algunas observaciones de carácter general. Para bajas concentraciones de portadores, los altos valores de la movilidad obtenidos a bajas temperaturas se deben principalmente a la supresión, en buena medida, de varios mecanismos de dispersión (especialmente el de impurezas). La distinción entre la movilidad Hall y la óhmica es necesaria para cálculos exactos, pero no altera en lo absoluto el orden de magnitud. Para bajas temperaturas la movilidad está limitada fundamentalmente por el mecanismo DP (una conclusión hecha también en /10/); sin embargo, el aporte del mecanismo PZ no debe ser despreciado si se requieren cálculos más rigurosos. Para otros materiales con efectos piezoeléctricos más fuertes (como el CdTe) se debe esperar una situación inversa. En este artículo hemos desarrollado un estudio sistemático de las movilidades en heteroestructuras semiconductoras de baja dimensionalidad, tanto Q1D como Q2D. Asimismo hemos presentado expresiones asintóticas para bajas temperaturas. Todas ellas pueden ser usadas para otros materiales. El estudio de la dispersión por fonones ópticos, debe ser todavía más detallado y será abordado en próximos trabajos.

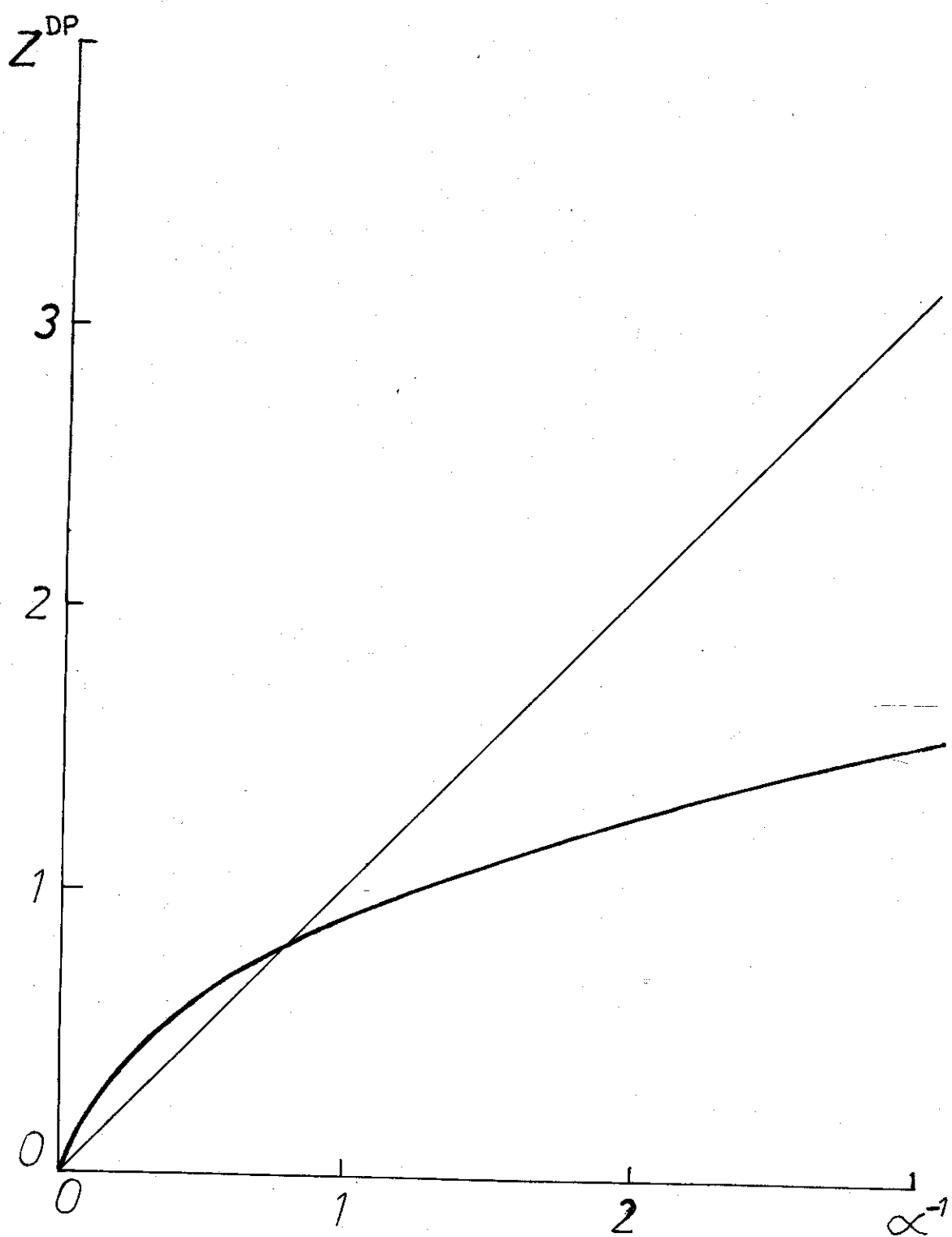


Figura 1. Movilidades acústicas relativas para acoplamiento DP en casos Q1D (curva fina) y Q2D (curva gruesa).

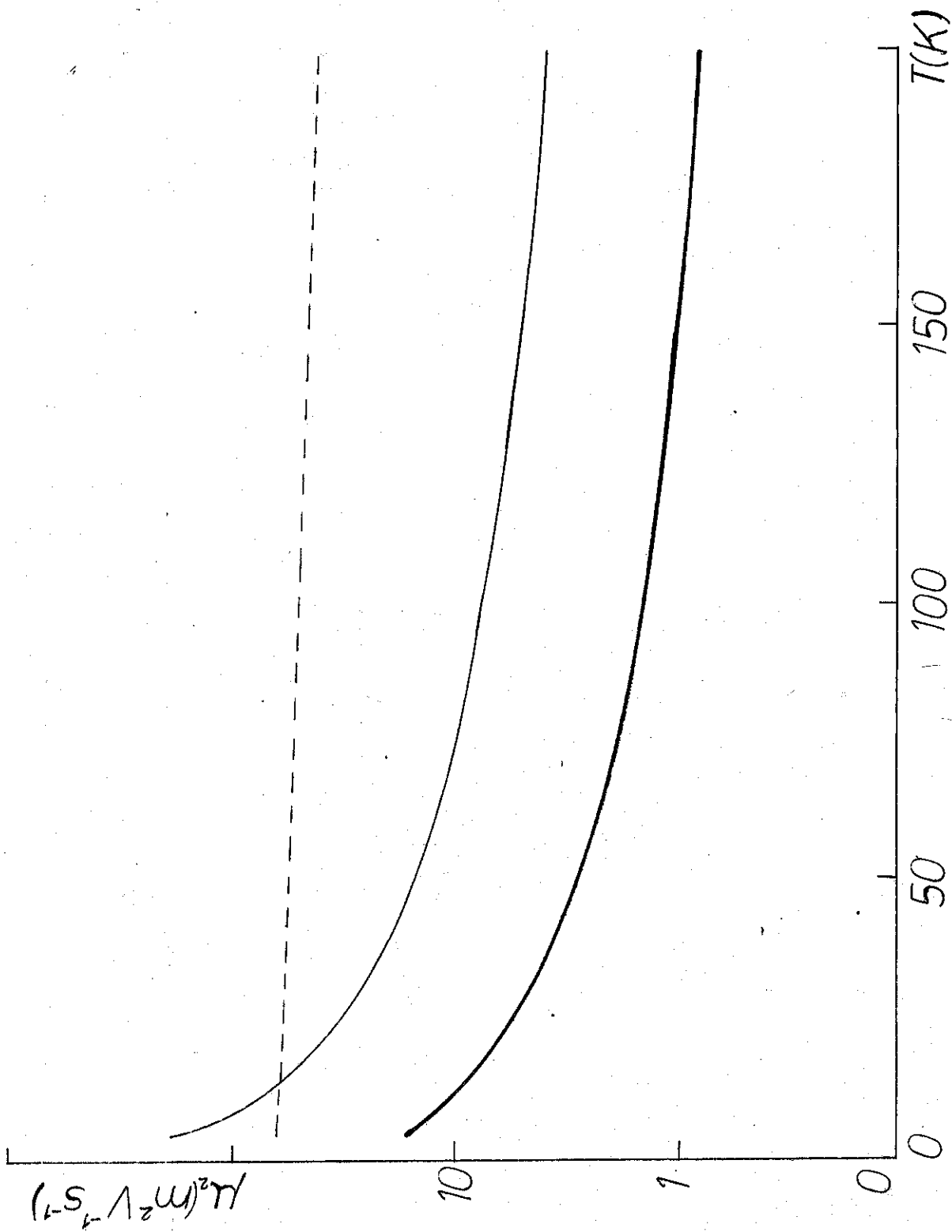


Figura 4. Movilidades acústicas absolutas PZ (curva discontinua)
 DP (curva fina) y combinada (curva gruesa) en caso Q2D.

REFERENCIAS

1. Hirakawa, K. y H. Sakaki (1986). Phys. Rev. B 33, 8291.
2. Foxon, C.T. y J.J. Harris (1989). Phillips J. Res. 41, 313.
3. Harris, J.J.; C.T. Foxon; K.B.J. Barriham; D.E. Lacklison; J. Hewett y C. White (1987). J. Appl. Phys. 61, 1219.
4. English, J.H.; A.C. Gossard; H.L. Stormer y K.W. Baldwin (1987). Appl. Phys. Lett. 50, 1826.
5. Comas, F.; C. Trallero; J. Tutor y H. León (aceptado para publicar) Rev. Cub. de Física.
6. Lee, J. y M.O. Vassell (1984). J. Phys. C 17, 2525.
7. Comas, F.; C. Trallero y J. Tutor (1987). Phys. Stat. Sol. (b) 139, 433.
8. Price, P.J. (1981). Price, Ann. Phys. 133, 217.
9. Lee, J. y M.O. Vassell (1984). Jpn. J. Appl. Phys. 23, 1086.
10. Arora, V.K. y A. Naeem (1985). Phys. Rev. B 31, 3887.
11. Chattopadhyay, D. (1985). Phys. Stat. Sol. (b) 135, 409.
12. Nag, B.R. (1986). Pramana 27, 47.
13. Comas, F.; C. Trallero; H. León y J. Tutor (1988). Physica B, 152, 352.
14. Bonch-Bruевич, B. y S. Kalashnikov (1977). *Física de los semiconductores*. MIR, Moscú (en ruso).
15. Anselm, A. (1981). *Introduction to Semiconductor Theory*. Izd. MIR, Moscow.

ANÁLISIS CUANTITATIVO DEL SISTEMA DE CONTROL DE LA FRECUENCIA CARDÍACA

Carlos A. Sánchez Catasús y Anastasio A. Cabrera Santos, Instituto de Cardiología y Cirugía Cardiovascular.

RESUMEN

Se presenta un método numérico para estimar la función característica del sistema de control de la frecuencia cardíaca en humanos. Cada sujeto bajo estudio fue sometido a una secuencia pseudoaleatoria de cargas físicas y estados de reposo durante 19 minutos (señal de entrada) y simultáneamente se midió el cambio de la frecuencia cardíaca en intervalos de 5 segundos (señal de salida). La estimación se realizó a partir de la autocorrelación de la señal de entrada y la correlación cruzada entre la señal de entrada y la señal de salida. La función estimada se trasladó al dominio de la frecuencia y se representó en un diagrama logarítmico. El método se aplicó en 10 sujetos normales de ambos sexos y en cuatro pacientes: dos con corazón trasplantado y dos portadores de marcapasos con autorregulación. La metodología desarrollada es válida en sujetos normales y sus resultados en los pacientes estudiados sugieren su empleo para seguir evolutivamente el restablecimiento de la función reguladora de la frecuencia cardíaca en sujetos con corazón trasplantado y en el control de calidad de marcapasos con autorregulación.

ABSTRACT

A mathematical procedure for estimating the characteristic function of the heart rate control system in humans is presented. Every individual studied was submitted to pseudorandom sequence of work loads and rest periods during 19 min (input signal) and simultaneously the change in heart rate was measured at 5 second intervals (output signal). The estimation was carried out from the autocorrelation function of the input signal and the cross-correlation function between the input and output signals. The estimated function was transferred to the frequency domain and represented in a logarithmic diagram. The method was applied on 10 normal subjects of either sex and in 4 patients (2 with transplanted hearts and 2 carriers of rate modulated pacemarkers). The methodology developed is valid in normal subjects and the results, in studied patients, suggest its use to follow the recovery of the heart rate regulating function in subjects with transplanted hearts and for the quality control of rate modulated pacemarkers.

INTRODUCCIÓN

En el pasado los principios de la teoría de control, aplicados al estudio de fenómenos biológicos, sólo se utilizaban cualitativamente. En los últimos años se han desarrollado métodos cuantitativos para explorar diferentes mecanismos de control (1-4).

El presente trabajo describe un método numérico que permite estimar la función característica del sistema de control de la frecuencia cardíaca en humanos (SCFC) y evaluar su comportamiento en el dominio de la frecuencia. Se basa en las técnicas de correlación estadística (5) y emplea como función excitadora una señal pseudoaleatoria (6). Se presentan los resultados en sujetos normales y algunas de sus posibles aplicaciones clínicas.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Sea $f(t)$ la función excitadora o señal de entrada y $g(t)$ la señal de salida. Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, entonces:

$$g(t) = \int_0^{\alpha} h(\tau) f(t-\tau) dt \quad [1]$$

donde $h(t)$ es la función característica y contiene información sobre las propiedades dinámicas del sistema de control (5).

Dividiendo el tiempo de observación en $r+1$ intervalos Δt , se obtiene una expresión aproximada de la Ec. 1 de la forma:

$$g(t) \approx \sum_{n=0}^r h_n f(t-n\Delta t) \quad [2]$$

siendo $h_n = h(n\Delta t)\Delta t$ para $n=0, 1, \dots, r$.

ABSTRACT

A mathematical procedure for estimating the characteristic function of the heart rate control system in humans is presented. Every individual studied was submitted to pseudorandom sequence of work loads and rest periods during 19 min (input signal) and simultaneously the change in heart rate was measured at 5 second intervals (output signal). The estimation was carried out from the autocorrelation function of the input signal and the cross-correlation function between the input and output signals. The estimated function was transferred to the frequency domain and represented in a logarithmic diagram. The method was applied on 10 normal subjects of either sex and in 4 patients (2 with transplanted hearts and 2 carriers of rate modulated pacemarkers). The methodology developed is valid in normal subjects and the results, in studied patients, suggest its use to follow the recovery of the heart rate regulating function in subjects with transplanted hearts and for the quality control of rate modulated pacemarkers.

INTRODUCCIÓN

En el pasado los principios de la teoría de control, aplicados al estudio de fenómenos biológicos, sólo se utilizaban cualitativamente. En los últimos años se han desarrollado métodos cuantitativos para explorar diferentes mecanismos de control (1-4).

El presente trabajo describe un método numérico que permite estimar la función característica del sistema de control de la frecuencia cardíaca en humanos (SCFC) y evaluar su comportamiento en el dominio de la frecuencia. Se basa en las técnicas de correlación estadística (5) y emplea como función excitadora una señal pseudoaleatoria (6). Se presentan los resultados en sujetos normales y algunas de sus posibles aplicaciones clínicas.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Sea $f(t)$ la función excitadora o señal de entrada y $g(t)$ la señal de salida. Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, entonces:

$$g(t) = \int_0^{\alpha} h(\tau) f(t-\tau) dt \quad [1]$$

donde $h(t)$ es la función característica y contiene información sobre las propiedades dinámicas del sistema de control (5).

Dividiendo el tiempo de observación en $r+1$ intervalos Δt , se obtiene una expresión aproximada de la Ec. 1 de la forma:

$$g(t) \approx \sum_{n=0}^r h_n f(t-n\Delta t) \quad [2]$$

siendo $h_n = h(n\Delta t)\Delta t$ para $n=0,1,\dots,r$.

El efecto de $f(t)$ en $t=\tau$ sobre sus valores subsiguientes, se representa estadísticamente por medio de la función de autocorrelación, $R_{ff}(\tau)$:

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)f(t+\tau)dt \quad [3]$$

De manera similar, el efecto de $f(t)$ en $t=\tau$, sobre los valores subsiguientes que tomará $g(t)$, se representa por la función de correlación cruzada, $R_{fg}(\tau)$:

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)g(t+\tau)dt \quad [4]$$

Sustituyendo la Ec. 2 en la Ec. 4 se obtiene:

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{n=0}^r h_n f(t)f(t+\tau-n\Delta t)dt \quad [5]$$

La Ec. 5 se transforma empleando la Ec. 3:

$$R_{fg}(\tau) = \sum_{n=0}^r R_{ff}(\tau) h_n (\tau-n\Delta t)$$

La expresión anterior evaluada para $r+1$ valores de τ es un sistema de $r+1$ ecuaciones lineales con $r+1$ incógnitas, que en notación matricial se expresa como:

$$\dot{R}_{fg} = \dot{R}_{ff} \dot{H} \quad [6]$$

$\dot{R}_{fg}$ - Matriz columna cuyos elementos son las funciones de correlación cruzada para $r+1$ valores de τ

$\dot{R}_{ff}$ - Matriz cuadrada cuyos elementos son las funciones de autocorrelación para $r+1$ valores de τ

$\dot{H}$ - Matriz columna formada por los $r+1$ valores de h_n

Si se multiplica ambos miembros de la Ec. 6 por la matriz inversa de $\dot{R}_{ff}$ se obtiene:

$$\dot{H} = \dot{R}_{ff}^{-1} \dot{R}_{fg}$$

Los elementos de la matriz $\dot{H}$ divididos por Δt son los valores estimados de $h(t)$. La respuesta de frecuencia del sistema se expresa a través de la

función transferencia de frecuencia $H(s)$, la cual es la transformada de Laplace de $h(t)$ (7):

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-st) dt$$

Mediante un diagrama logarítmico (DL) es posible representar la ganancia y la fase para distintos valores de frecuencia ($\omega = -sj$):

$$\text{Ganancia } (\omega) = \sqrt{(\text{Im}^2[H(s)] + \text{Re}^2[H(s)])} \quad (\text{dB}),$$

$$\text{Fase } (\omega) = \text{Tan}^{-1} (\text{Im} [H(s)] / \text{Re} [H(s)]) \quad (\text{rad})$$

MATERIAL Y MÉTODO

Se estudiaron 10 sujetos normales de ambos sexos con edades de 20 a 30 años. Se estudiaron además dos pacientes con corazón trasplantado (GAC y MPU) y dos portadores de marcapasos autorregulados (RMR y CMH).

A todos los sujetos estudiados se les realizó la prueba propuesta por Sato y cols. (4), la cual consiste en someter al individuo a una secuencia pseudoaleatoria de cargas y físicas estados de reposo durante 19 min (señal de entrada, con sólo dos valores enteros: 0 en reposo y 1 durante el ejercicio), y simultáneamente medir el cambio de la frecuencia cardíaca (señal de salida). Las cargas físicas fueron caminatas sobre una estera rodante con velocidad constante de 4.5 km/h y 10 % de pendiente. La frecuencia cardíaca (FC) se midió mediante monitoreo electrocardiográfico constante (25 mm/s) y se definió como el recíproco del promedio de 3 intervalos R-R consecutivos medidos cada 5 s (229 valores). Como FC en reposo se tomó el valor promedio durante los 4 primeros minutos de la prueba.

Se escribió un programa en N88 BASIC para una computadora personal NEC 9801E que calcula los valores de $h(t)$ y $H(s)$, y visualiza además en pantalla el DL correspondiente (2 min de procesamiento por paciente).

RESULTADOS

La FC tuvo un comportamiento similar en todos los sujetos normales, caracterizado por: elevación pronunciada ante cada carga física y disminución en el período de reposo siguiente. La Figura 1 muestra la variación de la FC durante la prueba en un sujeto normal, junto a la variación teórica calculada a partir de los valores estimados de $h(t)$. No se observaron diferencias significativas.

La Figura 2 muestra el DL del sujeto anterior. La ganancia se aproxima asintóticamente al valor G_0 en la región de las bajas frecuencias. A partir de 0,03 c/min comienza a decrecer suavemente pasando por la frecuencia F_1 ,

para la cual la ganancia es 3 dB menor que su valor máximo, hasta alcanzar en F2 un mínimo o valle. A continuación aumenta con un máximo o pico en F3. Por otra parte la fase se aproxima a cero en la región de las bajas frecuencias. Para valores mayores se produce un retardo que aumenta lentamente, con un máximo para una frecuencia ligeramente superior a F1. A partir de este valor disminuye hasta un mínimo entre F2 y F3. En la región de las altas frecuencias no se tuvieron en cuenta los valores de ganancia y fase debido a la baja relación señal/ruido. En todos los sujetos normales se observó un DL característico, por lo que se tomó a Go junto a la terna (F1,F2,F3) como parámetros dinámicos para describir cuantitativamente el sistema de control. Todos los parámetros tuvieron muy poca dispersión dentro del grupo de sujetos normales (Tabla).

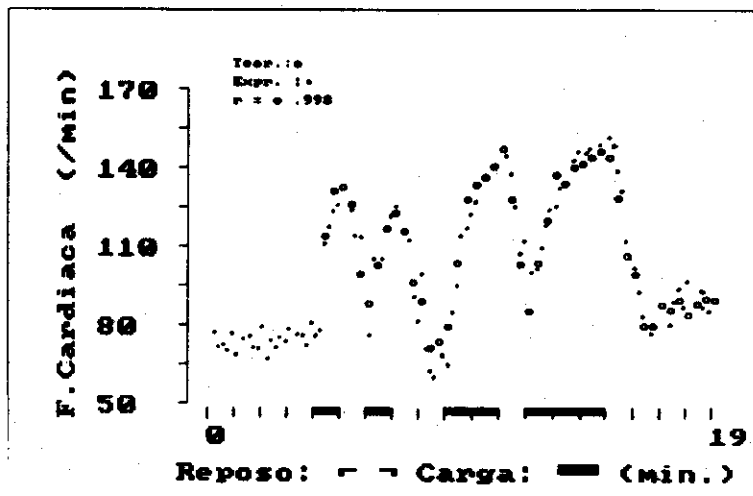


Figura 1. Variación experimental y teórica de la frecuencia cardíaca de un sujeto normal.

Figura 2. Diagrama logarítmico correspondiente al sujeto normal mostrado en la Figura 1.

Go = 38.79, F1 = 0.066,
F2 = 0.098 y F3 = 0.193.

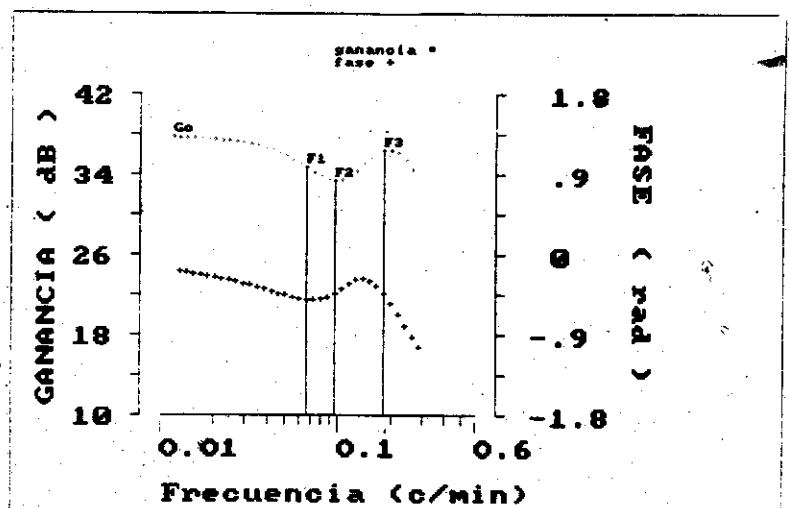


Tabla. Grupo normal. Parámetros dinámicos.

Sujeto	edad	sexo	Go(dB)	F1(c/min)	F2(c/min)	F3(c/min)
CCM	20	M	34.28	0.073	0.132	0.200
JFQ	25	M	37.89	0.067	0.114	0.195
JPS	20	M	37.27	0.067	0.125	0.204
MBC	30	M	39.27	0.060	0.126	0.189
CSC	29	M	33.62	0.065	0.135	0.217
IOI	28	F	36.16	0.055	0.108	0.185
VAA	27	F	36.98	0.068	0.129	0.202
VPR	27	F	37.72	0.073	0.122	0.213
JFF	20	F	35.86	0.078	0.135	0.217
GPR	25	F	38.79	0.066	0.098	0.193
Media	25.1		36.68	0.067	0.122	0.200
Dt	3.6		3.2	0.007	0.012	0.010

En el paciente GAC la variación de la FC fue similar a la observada en un sujeto normal (Figura 3 a), con la diferencia de tener una FC de reposo mayor. El DL fue de parámetros normales (Figura 3 b). El sujeto MPU tuvo una respuesta retardada con aumento de la FC durante toda la prueba, sólo interrumpido en los períodos de reposo más prolongados (Figura 4). El DL mostró una gran fluctuación a partir de F1 por lo que F2 y F3 no pudieron ser identificadas.

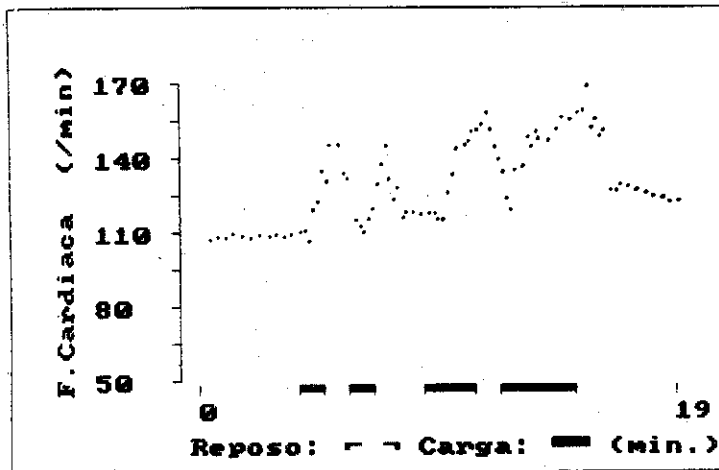


Figura 3a. Variación de la frecuencia cardíaca durante la prueba en el paciente con corazón trasplantado GAC.

Figura 3b. Diagrama logarítmico del paciente GAC.

Go = 34.75, F1 = 0.07, F2 = 0.131 y F3 = 0.210.

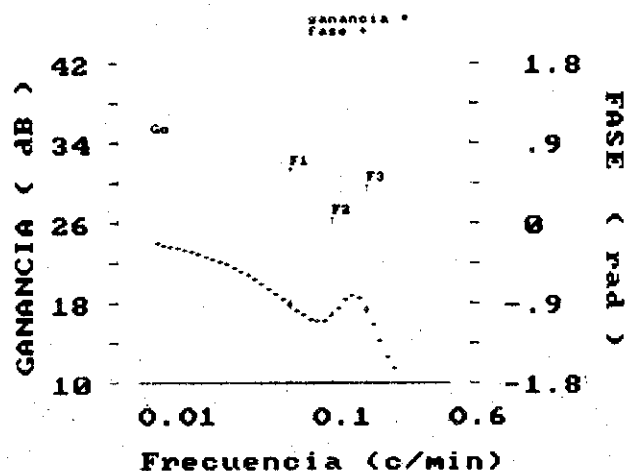
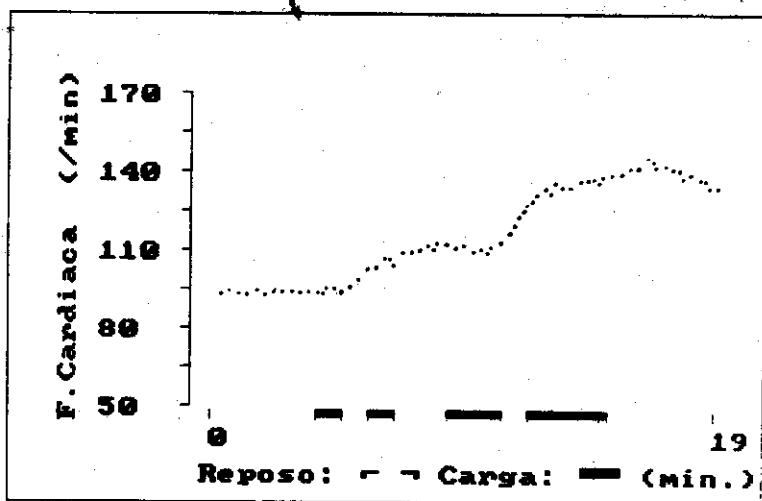


Figura 4. Variación de la frecuencia cardiaca durante la prueba en el paciente con corazón trasplantado MPU.



En el paciente RMR la respuesta de la FC fue análoga a la de un sujeto normal aunque con cambios menos pronunciados (Figura 5 a). El DL fue además parecido al de un sujeto normal, pero con todos los parámetros disminuidos (Figura 5 b). En el sujeto CMH se observó una respuesta totalmente anómala de la FC, característica de un sistema no controlado (Figura 6). En el DL no fue posible identificar ninguno de los parámetros.

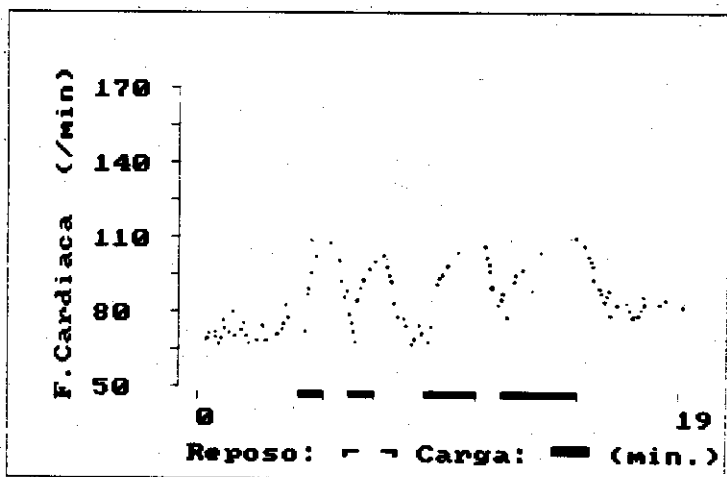


Figura 5a. Variación de la frecuencia cardiaca durante la prueba en el paciente con marca-paso autorregulado RMR.

Figura 5b. Diagrama logarítmico del paciente RMR

$G_0 = 32,60$, $F_1 = 0,052$,
 $F_2 = 0,092$ y $F_3 = 0,179$.

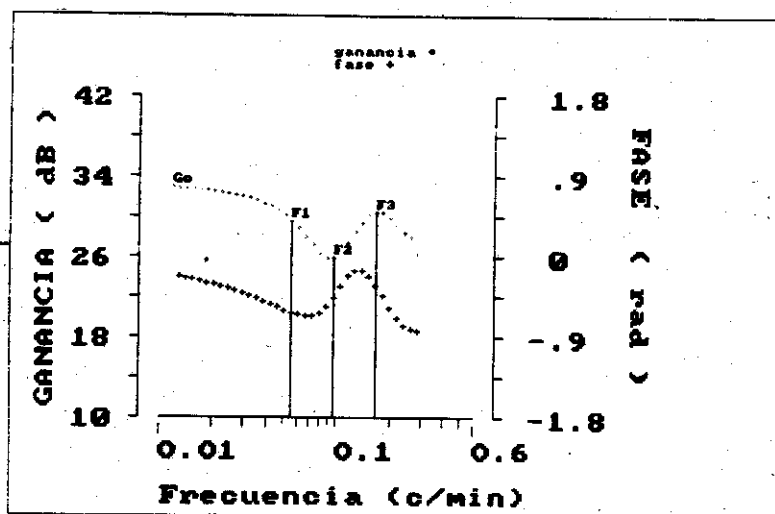
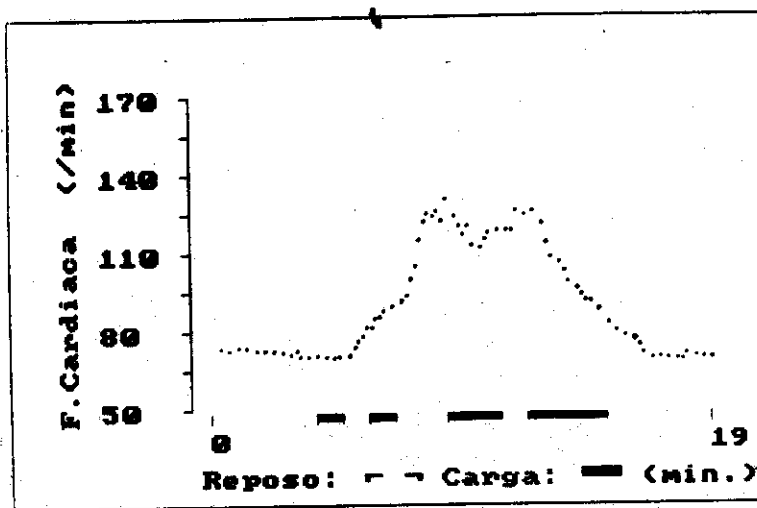


Figura 6. Variación de la frecuencia cardíaca durante la prueba en el paciente con marcapaso auto-regulado CMH.



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el SCFC la señal de salida no tiene efecto sobre la acción del control (sistema de lazo abierto), por tanto para cada valor de la señal de entrada hay una respuesta fija, cuya exactitud depende de la calibración del sistema determinada por la función característica $h(t)$.

$h(t)$ expresa cuantitativamente la acción global de tres mecanismos (8): i) control reflejo por el sistema nervioso autónomo, ii) regulación a través de sustancias circulantes en la sangre, y iii) cambios hemodinámicos que modifican la longitud de las fibras marcapaso del miocardio; si bien en sujetos normales el control autonómico tiene un rol predominante. El análisis de $h(t)$ en el dominio de la frecuencia permite separar sus dos componentes primarios, la ganancia y la fase del sistema. La primera representa la amplitud de la respuesta ante situaciones que modifican la FC, mientras que la segunda mide la rapidez de esa respuesta.

Para cambios relativamente lentos de la actividad física (región de las bajas frecuencias), G_0 señala la ganancia de trabajo del sistema; $F1$ indica una frecuencia límite a partir de la cual se produce un descenso de la ganancia y un retardo significativos y $F2$ un valor crítico que se corresponde con un cambio brusco de la actividad física. Para cambios más rápidos aún, el comportamiento de la ganancia y la fase sugieren una recuperación del sistema, señalada en términos de frecuencia por $F3$. Así, $F1$ y $F2$ y $F3$ marcan las fronteras de tres regiones con diferentes respuestas del SCFC.

La alta correlación obtenida entre los valores de la FC observados y calculados a partir de $h(t)$, demuestra la validez del método ($p < 0.01$). Los parámetros empleados para describir el sistema tuvieron pequeñas desviaciones típicas, lo cual habla en favor de su precisión.

En los pacientes con corazón trasplantado está ausente el primero de los mecanismos de control. Los resultados en el paciente GAC mostraron un SCFC con características dinámicas muy similares a las observadas en el grupo

normal. Tal comportamiento sólo puede explicarse asumiendo que tuvo lugar cierto grado de reinervación autonómica. Por el contrario, el paciente MPU tuvo una conducta típica de un sujeto transplantado (9). En este caso el DL tuvo una gran fluctuación en la región (F2-F3) motivada quizás porque la hipótesis de linealidad, supuesta por el método, no se cumple en este paciente.

Por otra parte, en los sujetos portadores de marcapasos autorregulados ha sido sustituido el tercero de los mecanismos por un dispositivo artificial, el cual opera como un sistema de control. Estos detectan las situaciones fisiológicas cambiantes y ajustan la FC del paciente a través de impulsos de estimulación (10). La eficacia de tal dispositivo está dada por la FC entregada en relación con la demanda hemodinámica presente y por la rapidez de su cambio, cuando varía la situación fisiológica. Estas características hacen que su funcionamiento pueda ser evaluado por el método propuesto.

En el paciente RMR, a pesar de tener en su forma un parecido al observado en pacientes normales, todos los parámetros fueron menores. Estas diferencias reflejan una respuesta menos intensa y de menor rapidez que la correspondiente a personas totalmente sanas. Más crítica aún es la situación del sujeto CMH, en el cual se observa un completo descontrol producido por un mal funcionamiento del marcapaso.

La metodología desarrollada es válida en sujetos normales en el rango de linealidad del SCFC y sus resultados en los pacientes estudiados sugieren su empleo para seguir evolutivamente el restablecimiento de la función reguladora de la FC en sujetos con corazón transplantado, y el control de calidad de marcapasos con autorregulación. Tiene además la ventaja de ser una prueba cuantitativa e incruenta.

REFERENCIAS

1. Milhorn, H.T. (1966). *The Application of Control Theory to Physiological System*. Philadelphia and London: Saunders, p. 158-184.
2. Howard, W.G. (1986). *Multiple Model Adaptive control procedure for blood pressure control*. IEEE Trans Biomed Engineering. 33 (1): 10-19.
3. Kaufman, H. et al. (1984). *Model reference adaptive control of drug infusion rate*. Automatica, vol. 20, no. 2, p. 205-209.
4. Sato, I. y cols. (1976). *System analysis of heart rate control in man*. J. Appl. Physiol. 41 (5): 790-796.
5. Bendat, J.S. (1958). *Principles and applications of random noise theory*. London; John Wiley and Sons, Inc., p. 1-28.
6. Roberts, P. (1966). *Statistical properties of smoothed maximal length linear binary sequences*. Proceedings IEEE Vol. 113, No. 1.

7. Ogata, K. (1980). Ingeniería de control moderna. Edición revolucionaria, p. 406-516.
8. Guyton, A.C. (1987). Tratado de Fisiología médica. Edición revolucionaria, p. 276-292.
9. Beck, W. et al. (1969). *Heart rate after cardiac transplantation*. Circulation; 40: 437-445.
10. Bueno Leza, J. (1987). *Algunas consideraciones sobre los marcapasos cardíacos*. Rev. Cub. Cardiol. Cir. Cardiovasc 1(2): 7-17, julio-diciembre, 1987.

SOLUCION FUNDAMENTAL Y FUNCION DE GREEN PARA LA ECUACION DE LAS OSCILACIONES PEQUEÑAS EN UN FLUIDO VISCOSO COMPRESIBLE

José Marín Antuña, Oscar Sotolongo Costa, Departamento de Física Teórica,
Universidad de La Habana.

RESUMEN

Se obtienen expresiones para la solución fundamental de la ecuación de las oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso y compresible y se comprueba su reducción a la solución fundamental conocida para la ecuación de D'Alembert en el caso de ausencia de viscosidad. Se obtiene, además, la expresión de la función de Green para el problema de las oscilaciones radiales de la presión dinámica en una esfera con condición de frontera homogénea y la solución del problema general de las oscilaciones radiales en la esfera en términos de integrales de las condiciones iniciales y la inhomogeneidad de la ecuación y la función de Green obtenida.

ABSTRACT

The authors obtain expressions for the fundamental solution of the equation of small oscillations in a viscose and compresible fluid and proof his reduction to the wellknown fundamental solution for the D'Alembert's equation in the case of absence of viscosity. They obtain too the expresion of the Green's function for the problem of the radial oscillations of the dynamical pressure in a sfere with homogeneous boundary condition and the solution of the general problem of the radial oscillations in the

sfere in terms of integrals of the initial conditions and the inhomogeneity of the equation and the obtained Green's function.

INTRODUCCIÓN

En los trabajos teóricos comenzados recientemente sobre el estudio de la excitación y propagación de ondas lineales en fluidos viscosos compresibles [1] se deduce una ecuación para describir las pequeñas oscilaciones en tal fluido y se hace un análisis de las principales características físicas de los parámetros de dicha ecuación. En un segundo trabajo [2] se continúa la investigación teórica de la propagación de ondas en tales medios. Con vistas a poder resolver los problemas matemáticos relacionados con esta ecuación, resulta de gran utilidad conocer la solución fundamental. Matemáticamente, ello es de importancia, debido al carácter no clásico de la ecuación obtenida; las soluciones del problema de frontera pueden ser expresadas con ayuda de la solución fundamental en forma de potenciales que permiten utilizar, para la resolución de los mismos, los métodos tradicionales de ecuaciones integrales.

1. Planteamiento del problema.

Supongamos que tenemos un fluido viscoso compresible homogéneo que ocupa todo el espacio R^3 . La propagación de pequeñas excitaciones de la presión en el mismo se describe por la ecuación [1]:

$$L[u] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - M \nabla^2 u \right] - \nabla^2 u = 0 \quad (1)$$

donde $u(x,t)$ es la presión dinámica, $x=\{x_1, x_2, x_3\}$, c es la velocidad del sonido y $M = \left[\xi + \frac{4}{3} \eta \right]$ (aquí η es la viscosidad cinemática y ξ la llamada segunda viscosidad, asociada a la compresibilidad [3]).

Pasemos a variables adimensionales $x_i = x_i/d$ ($i=1,2,3$), $t=ct/d$, $\mu=M/(cd)$, donde d es cierta longitud característica. Entonces la solución fundamental, es decir, el campo de presiones excitado por la acción de una fuente unitaria, instantánea y puntual, se define [4] como la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u - \nabla^2 u = \delta(x) \delta(t) \quad (2)$$

Aquí $\delta(x)$ es la conocida función delta de Dirac.

2. Obtención de la solución.

Supongamos que $u(x,t) \rightarrow 0 \quad \forall |x| \rightarrow \infty$ y representemos por $U(x,p)$ a la transformada de Laplace de $u(x,t)$. Entonces, aplicando transformada de Laplace a (2) obtenemos

$$\nabla^2 U - \frac{p^2}{\mu p + 1} U = -\frac{\delta(x)}{\mu p + 1} \quad (3)$$

con $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x, p) = 0$

La ecuación de Helmholtz (3) tiene por solución acotada en el infinito la función:

$$U(x, p) = \frac{1}{4\pi|x|(\mu p + 1)} e^{-\frac{p|x|}{\sqrt{\mu p + 1}}} \quad (4)$$

Para que se cumpla la condición en el infinito escogemos la rama de $\sqrt{\mu p + 1}$ que tenga para $\text{Re } p > 0$ valores positivos; es decir, con un corte en $\text{Re } p < -1/\mu$.

Usando la fórmula de Mellin, no es difícil llegar a la expresión del original

$$u(x, t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{8\pi^2 \mu |x|} \int_{1+\mu a - i\infty}^{1+\mu a + i\infty} \frac{ds}{s} \left[e^{\frac{st}{\mu}} - \frac{|x|\sqrt{s}}{\mu} + \frac{|x|}{\mu\sqrt{s}} \right] \quad (5)$$

Por medio del teorema de Cauchy deformamos el contorno de integración en (5), en el formado por la circunferencia $|s|=1$ y los rayos por los bordes superior e inferior del corte ($-\infty < \text{Re } s < -1$). Entonces:

$$u(x, t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi^2 \mu |x|} \int_0^\pi e^{\frac{t}{\mu} \cos \phi} \cos \left[\frac{t}{\mu} \sin \phi - \frac{2|x|}{\mu} \sin \frac{\phi}{2} \right] d\phi - \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi^2 \mu |x|} \int_1^\infty e^{-\frac{rt}{\mu}} \sin \left[\frac{|x|}{\mu} \left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \right] \frac{dr}{r} \quad (6)$$

Es posible comprobar, mediante sustitución directa, que el segundo sumando de (6) satisface la ecuación (2) con parte derecha nula. Como la solución fundamental se determina con exactitud de una solución de la ecuación homogénea, por tanto la solución fundamental es:

$$G(x, t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi^2 \mu |x|} \int_0^\pi e^{\frac{t}{\mu} \cos \phi} \cos \left[\frac{t}{\mu} \sin \phi - \frac{2|x|}{\mu} \sin \frac{\phi}{2} \right] d\phi \quad (7)$$

3. CASO DE FLUIDO IDEAL, NO VISCOOSO.

Nótese que para $\mu=0$ (no hay viscosidad y el fluido es ideal):

$$U(x,p) = \frac{1}{4\mu|x|} e^{-p|x|} \quad (8)$$

de manera que, en este caso

$$G_{\mu=0}(x,t) = \frac{1}{8\pi^2|x|i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{p(t-|x|)} dp = \frac{\delta(t-|x|)}{4\pi|x|} \quad (9)$$

que coincide exactamente con la solución fundamental de la ecuación clásica de D'Alembert, como era de esperar. Un cálculo sencillo permite comprobar que la solución fundamental (7) tiende, en el límite cuando $\mu \rightarrow 0$, a la solución fundamental de la ecuación de D'Alembert, dada por (9). Una idea de este cálculo se brinda en el anexo de este artículo.

4. CASO UNIDIMENSIONAL

Si en la ecuación (2) consideramos soluciones con simetría en el plano (x_1, x_2) , entonces, denotando $z=x_3$, la ecuación se escribe como:

$$u_{tt} - \mu u_{zzt} - u_{zz} = \delta(z)\delta(t) \quad (10)$$

La aplicación de las transformadas integrales de manera similar al punto 1 del presente artículo, permite obtener en este caso para la solución fundamental la expresión

$$u(z,t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{ds}{(s-1)\sqrt{s}} \left(e^{\frac{st}{\mu}} - \frac{|z|\sqrt{s}}{\mu} + \frac{|z|}{\mu\sqrt{s}} \right) \quad (11)$$

cuyo integrando tiene un punto de ramificación en $s=0$ y un polo simple en $s=1$. La realización de cálculos similares al punto 2 nos conduce en este caso de (11) para la solución fundamental a la expresión:

$$u(z,t) = \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{4\pi^2\mu|z|} \int_0^\pi e^{\frac{t}{\mu}\cos\varphi} \cos\left(\frac{t}{\mu}\sin\varphi - \frac{2|z|}{\mu}\sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi \quad (12)$$

que está en plena correspondencia con el resultado anteriormente obtenido.

En un trabajo futuro consideraremos algunos problemas con simetría espacial que permitirán sacar algunas conclusiones de interés físico sobre las características y el comportamiento de las ondas en los fluidos viscosos compresibles.

5. FUNCIÓN DE GREEN PARA LOS PROBLEMAS DE FRONTERA EN LA ESFERA

Consideremos un dominio esférico de radio r_0 ocupado por un fluido viscoso compresible en el cual las pequeñas oscilaciones de la presión dinámica se describen por la ecuación (1). Para condiciones de frontera homogéneas sobre la superficie de la esfera, la solución fundamental nos da la función de Green en la esfera. Los cálculos dan para la función de Green la expresión

$$G(r, R, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta(k_0 - k)}{\lambda_k \omega_k \|v_k\|^2} e^{-\frac{\lambda_k^2 M}{2} t} \sin \lambda_k \omega_k t v_k(r) v_k(R) \quad (13)$$

donde

$$\omega_k = \sqrt{4c^2 - \lambda_k^2 M}$$

y los λ_k son los autovalores del problema de Sturm-Liouville en la esfera con autofunciones $v_k(r)$ y las condiciones de frontera homogéneas. $\|v_k\|^2$ es el cuadrado de la norma de las autofunciones y $\theta(k)$ es la conocida función paso unitario de Heaviside; k_0 es el máximo valor de k para el que $\lambda_k < \frac{2c}{M}$.

La solución del problema general

$$\begin{cases} L[u] = f(r, t) \quad \forall 0 \leq r \leq r_0, \quad t > 0 \\ U(r, 0) = \varphi(r) \\ u_t(r, 0) = \psi(r) \\ \text{c.f.} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

se expresa por la fórmula integral

$$\begin{aligned} u(r, t) = & \int_0^{r_0} \varphi(\xi) G_t(r, \xi, t) d\xi + \int_0^{r_0} \psi(\xi) G(r, \xi, t) d\xi + \\ & + \int_0^t \int_0^{r_0} f(\xi, \tau) G(r, \xi, t - \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

que da las oscilaciones radiales de la presión dinámica en la esfera.

Para el caso de fluido ideal ($M \rightarrow 0$), de (13) se obtiene el resultado conocido

$$G(r, R, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2c\lambda_k \|v_k\|^2} \sin 2c\lambda_k t v_k(r) v_k(R) \quad (16)$$

para la función de Green de la ecuación de D'Alembert en la esfera.

CONCLUSIONES

Los cálculos realizados constituyen una continuación consecuente de las investigaciones iniciadas en [1] y [2] sobre la excitación y propagación de ondas en fluidos viscosos compresibles. Con ellos hemos logrado obtener la solución fundamental del operador que figura en la ecuación (1), lo que nos permitirá utilizar la técnica de ecuaciones integrales para resolver problemas sobre difracción de ondas no estacionarias en diferentes obstáculos. También se obtuvo la expresión general de la función de Green en la esfera para el operador (1) que responde a condiciones de frontera homogéneas arbitrarias. Con ella la solución de los problemas con condiciones iniciales para este operador adquieren formas integrales similares a las fórmulas conocidas para los operadores clásicos, lo que, indudablemente, nos brinda grandes posibilidades de cálculo. El estudio de las soluciones fundamentales es de gran importancia, ya que con su ayuda las soluciones de los problemas que se planteen para el operador pueden expresarse en términos de potenciales. En el trabajo [7] del primero de los autores del presente trabajo se realizan cálculos de soluciones fundamentales asociadas a soluciones en los fluidos viscosos compresibles con determinada simetría.

ANEXO

Comprobemos que, efectivamente, el límite de (7) para $\mu \rightarrow 0$ da (9):

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} G = \frac{1}{4\pi|x|} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\mu} \int_0^\pi e^{-\frac{t}{\mu}(1-\cos\varphi)} \cos \left[\frac{2}{\mu} \left(t \cos \frac{\varphi}{2} - |x| \right) \sin \frac{\varphi}{2} \right] d\varphi \quad (A)$$

En la integral en (A) hagamos el cambio de variables: $z = \sqrt{2t} \sin \frac{\varphi}{2}$.

Obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi\mu} \sqrt{\frac{2}{t}} \int_0^{\sqrt{2t}} e^{-\frac{z^2}{\mu}} \cos \left[\sqrt{\frac{2}{t}} \frac{z}{\mu} \left(t \sqrt{1 - \frac{z^2}{2t}} - |x| \right) \right] \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{2t}}} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi\mu} \sqrt{\frac{2}{t}} \int_0^{\sqrt{2t}} e^{-\frac{z^2}{\mu}} \cos \left[\sqrt{\frac{2}{t}} \frac{z}{\mu} (t - |x|) \right] dz + \\ &+ \frac{1}{\pi\mu} \sqrt{\frac{2}{t}} \int_0^{\sqrt{2t}} e^{-\frac{z^2}{\mu}} \left\{ \frac{\cos \left[\sqrt{\frac{2}{t}} \frac{z}{\mu} \left(t \sqrt{1 - \frac{z^2}{2t}} - |x| \right) \right]}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{2t}}} - \right. \\ &\left. - \cos \left[\sqrt{\frac{2}{t}} \frac{z}{\mu} (t - |x|) \right] \right\} dz \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

El segundo sumando para $\mu \rightarrow 0$, es del orden $O(\sqrt{\mu})$ [5].

Por otra parte, el primer sumando, teniendo en cuenta [6], se puede expresar como:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu t}} e^{-\frac{(t-|x|)^2}{2\mu t}} - \frac{1}{\pi\mu} \sqrt{\frac{2}{t}} \int_{\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{\mu}} \cos \left[\sqrt{\frac{2}{t}} \frac{z}{\mu} (t - |x|) \right] dz \quad (B)$$

La integral en (B) tiende a cero para $\mu \rightarrow 0$. Por lo tanto, finalmente,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} I_1 = \delta(t - |x|) \quad (C)$$

Por lo que queda rigurosamente demostrado que para $G(x,t)$ dada por (7):

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} G(x,t) = \frac{\delta(t - |x|)}{4\pi |x|} \quad (D)$$

De esta manera queda establecida, por la fórmula (7), la solución fundamental de la ecuación para las pequeñas oscilaciones de un fluido viscoso compresible, que se reduce a la solución fundamental de la ecuación de D'Alembert, cuando la viscosidad desaparece.

REFERENCIAS

1. Marín Antuña, J., O. Sotolongo Costa (1991). *Sobre una ecuación para las oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso compresible*. Revista Cubana de Física, Vol. XI, No. 1.
2. ----- . *Ondas en medios viscosos compresibles*. Revista Cubana de Física, 1991 (aceptado para publicar).
3. Landau, L.D., E.M. Lifshits (1988). *Hidrodinámica*. Serie de Física Teórica. Moscú, Nauka, 1988.
4. Vladimirov, V.S. (1971). *Ecuaciones de la Física Matemática*, Moscú Nauka.
5. Copson, E.T. (1966). *Desarrollos asintóticos*. Moscú, Mir.
6. Marín Antuña, J. (1990) *Teoría de Funciones de Variable Compleja*. La Habana, Pueblo y Educación.
7. ----- (1991). *Oscilaciones no estacionarias en un fluido viscoso compresible para una excitación periódica espacial*. Revista Cubana de Física (aceptado para publicar) Vol. XI, No. 3, 1991.

OSCILACIONES NO ESTACIONARIAS DE UN FLUIDO VISCOSO COMPRESIBLE PARA UNA EXCITACION PERIODICA ESPACIAL

José Marín Antuña, Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana.

RESUMEN

Se estudia un problema de frontera que describe una clase de movimientos de un fluido viscoso y compresible bajo la acción de una excitación simétrica periódica espacial. Sobre la base de fórmulas análogas a las fórmulas de Green, se construye la solución de este problema, se estudia el carácter de la solución para viscosidades pequeñas y se investiga su comportamiento para tiempos grandes. Se analiza también el caso de la excitación de longitud de onda corta.

ABSTRACT

The author studies a boundary-value problem which describes a class of movements of a viscose comprehensible fluid by the action of a symmetric space periodic excitation. In the base of analog of Green's formulae he makes the solution of this problem, studies the character of the solution for small viscosity and his behavior for big time. He also analyses the case of excitation os short wave length.

INTRODUCCIÓN

Los problemas de la dinámica de un fluido viscoso hace tiempo son de gran interés [1], [2]. Una importancia particular tienen los problemas no

estacionarios y la investigación del comportamiento asintótico de sus soluciones para tiempos grandes, teniendo en cuenta los efectos de la compresibilidad y de la viscosidad. La idea general sobre el carácter de estos procesos se puede obtener ya dentro de los marcos de un modelo lineal.

En el presente trabajo se estudia un problema de frontera que describe una clase de movimientos de un fluido viscoso y compresible bajo la acción de una excitación simétrica periódica espacial. Sobre la base de fórmulas análogas a las fórmulas de Green, se construye la solución de este problema, se estudia el carácter de la solución para viscosidades pequeñas y se investiga su comportamiento para tiempos grandes. Se analiza también el caso de la excitación de longitud de onda corta.

1. PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL PROBLEMA

Pasemos al planteamiento del problema. La presión dinámica en un fluido viscoso compresible, que realiza oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio, se describe por la ecuación [3], [4]:

$$\varepsilon^2 u_{tt} - \gamma \nabla^2 u_t - \nabla^2 u = 0 \quad (1)$$

donde $\gamma = (\xi + 4\eta/3)\varepsilon^2 \rho^{-1}$ es el parámetro de viscosidad (η es la viscosidad de cizalladura, ξ la viscosidad volumétrica); $\varepsilon = c^{-1}$ (c es la velocidad del sonido), ρ es la densidad del fluido en estado no excitado.

Supongamos que el fluido ocupa el semiespacio $R_+^3 = \{(x, y) \in R^3 : z > 0\}$ y que en el instante inicial se encuentra en estado de reposo, es decir

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$$

En la frontera $z = 0$ está dada una presión dinámica del tipo siguiente:

$$u|_{z=0} = f(t) \cos \alpha x$$

donde $\alpha > 0$, $f(0) = f'(0) = 0$.

Basados en consideraciones físicas evidentes, en la simetría y la periodicidad de las condiciones iniciales y de frontera, así como en que estas no dependen de la coordenada y , buscaremos la función $u(x, y, z, t)$ en la forma

$$u = v(z, t) \cos \alpha x.$$

Entonces obtenemos para $v(z, t)$ el siguiente problema de frontera unidimensional:

$$L_{zt}^{\alpha\gamma}[v(z, t)] \equiv \varepsilon^2 v_{tt} - \gamma(\partial_z^2 - \alpha^2)v_t - (\partial_z^2 - \alpha^2)v = 0, \quad z, t > 0 \quad (2)$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

$$v|_{z=0} = f(t)$$

(4)

2. CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN

Buscaremos la solución del problema (2)-(4) en la clase K de funciones $\psi(z,t)$ que cumplan las siguientes condiciones de suavidad y acotamiento:

$$1) \exists \frac{\partial^{k+m} \psi}{\partial t^k \partial z^m} \in C[(0, \infty) \times (0, \infty)]$$

$$\text{donde } (k, m) \in B^{(2,0)} \cup B^{(1,2)};$$

$$2) \frac{\partial^{k+m} \psi}{\partial t^k \partial z^m} \in C[z \in [0, h]; L_2(0, T)] \quad \forall h, T > 0, (k, m) \in B^{(1,1)}$$

$$3) \frac{\partial^k \psi}{\partial t^k} \in C[t \in [0, T]; L_2(0, h)] \quad \forall h, T > 0, k=0, 1$$

$$4) \left\| \frac{\partial^{k+m} \psi}{\partial t^k \partial z^m} \right\|_{L_2(0, T)} \leq C_T (1+z^\beta) \text{ para cierta } \beta > 0, (k, m) \in B^{(1,1)}$$

Aquí se han usado las siguientes notaciones:

$$B^{(k_1, k_2)} \equiv \left\{ (s_1, s_2) : s_i \in \{0, \dots, k_i\}, i=1, 2 \right\}$$

$C[\xi \in [\alpha, \beta]; H]$ es el espacio de funciones continuas abstractas de la variable ξ con valores en el espacio de Hilbert H .

La expresión $\frac{\partial^{k+m} \psi}{\partial t^k \partial z^m}$ supone todas las derivadas cruzadas del tipo indicado. Con respecto a la función $f(t)$ supondremos lo siguiente:

$$f(t) \in C^2[0, \infty), f(0)=f'(0)=0$$

Mediante la técnica de la transformada de Fourier y el teorema de Peli-Wiener [5] se puede demostrar que la siguiente función es la solución fundamental del operador $L^{\alpha\gamma}_{zt}$:

$$E^{\alpha\gamma}(z, t) = \frac{\theta(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|z| - \frac{\gamma}{2\varepsilon^2}(k^2 + \alpha^2)} \frac{\text{sh} \left\{ \frac{\sqrt{\mu_{\alpha\gamma}(k)}}{2\varepsilon^2} \right\}}{\sqrt{\mu_{\alpha\gamma}(k)}} dk \quad (1.1)$$

$$\text{donde } \mu_{\alpha\gamma}(k) = \gamma^2(k^2 + \alpha^2) - 4\varepsilon^2(k^2 + \alpha^2).$$

Introduzcamos la notación

$$Q_h^{\sigma\delta}(z,t) \equiv \{(\xi,\tau) \mid \xi \in (\sigma, z-\sigma) \cup (z+\sigma, h), \tau \in (\delta, t-\delta)\}$$

$$(h > z + \sigma > 3\sigma > 0; 0 < 2\delta < t).$$

Supongamos que la función $v(z,t) \in K$ es la solución del problema (2) - (4). En las integrales a la izquierda de las desigualdades

$$\int_{Q_h^{\sigma\delta}(z,t)} L_{\xi\tau}^{\alpha\gamma}[v(\xi,\tau)] E^{\alpha\gamma}(z \pm \xi, t-\tau) d\xi d\tau = 0$$

realicemos la integración por partes tantas veces como sea necesario para que todas las derivadas que están en $L_{\xi\tau}^{\alpha\gamma}$ pasen a $E^{\alpha\gamma}(z \pm \xi, t-\tau)$ y tengamos en cuenta, al hacerlo, que para $(\xi,\tau) \in Q_h^{\sigma\delta}(z,t)$ tienen lugar las igualdades $L_{z\tau}^{\alpha\gamma}[E^{\alpha\gamma}(z \pm \xi, t-\tau)] = 0$ (lo que se comprueba fácilmente de forma directa). Después de esto, tendamos δ y σ a cero y h a infinito, teniendo en cuenta las condiciones iniciales y que $v(z,t)$ pertenece a la clase K . Como resultado, se obtienen las siguientes fórmulas de Green del operador $L_{z\tau}^{\alpha\gamma}$:

$$\begin{aligned} \frac{1+(-1)^l}{2} v(z,t) = \\ = - \int_0^t \left\{ E^{\alpha\gamma}(z, t-\tau) \left(\gamma \frac{d}{d\tau} + 1 \right) v_z(0,\tau) + (-1)^l E_z^{\alpha\gamma}(z, t-\tau) \left(\gamma \frac{d}{d\tau} + 1 \right) v(0,\tau) \right\} d\tau \end{aligned} \quad (1.2)$$

con $l=1,2$, $z,t > 0$.

Restando a la fórmula con $l=2$ la correspondiente con $l=1$ y teniendo en cuenta la condición de frontera (3), se obtiene la fórmula:

$$v(z,t) = -2 \int_0^t E_z^{\alpha\gamma}(z, t-\tau) \left(\gamma \frac{d}{d\tau} + 1 \right) f(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

Así pues, si en la clase K existe la solución del problema (2) - (4), esta tiene la forma (1.3). Por otra parte, se puede demostrar que la función (1.3) pertenece a la clase K y satisface el problema (2) - (4). De esta forma, tiene lugar el siguiente resultado.

Teorema 1. La solución del problema (2) - (4) existe y es única en la clase K y viene dada por la fórmula (1.3).

Señalemos que con ayuda de las fórmulas (1.2) es fácil obtener una expresión de la solución construida a través de su derivada respecto a z en $z=0$.

$$v(z,t) = -2 \int_0^t E^{\alpha\gamma}(z,t-\tau) \left[\gamma \frac{d}{d\tau} + 1 \right] g(\tau) d\tau$$

donde $g(\tau) \equiv v_z(0,\tau)$.

Estudiemos la conducta de la solución obtenida para valores pequeños del parámetro de viscosidad γ .

Para $\gamma=0$ la ecuación (2) se convierte en la ecuación de Klein-Gordon:

$$L_{zt}^{\alpha} [v(z,t)] \equiv \varepsilon^2 v_{tt} - v_{zz} + \alpha^2 v = 0 \quad (1.4)$$

cuya solución fundamental "retardada" es la función (ver, por ejemplo, [6]):

$$E^{\alpha}(z,t) = \frac{\theta(t-\varepsilon|z|)}{2\varepsilon} J_0 \left[\alpha \sqrt{\frac{t^2}{\varepsilon^2} - z^2} \right]$$

Supongamos que cierta función $v^0(z,t)$ satisface la ecuación (1.4) en sentido generalizado, tiene derivadas parciales respecto a z y t hasta segundo orden continuas para $z, t > 0$ y $z \neq t/\varepsilon$ y acotadas para $z \geq 0, t \geq 0$, y tiene los valores iniciales $v^0|_{t=0} = v_t^0|_{t=0} = 0$. Se puede demostrar que, en este caso, para la función $v^0(z,t)$ tienen validez las siguientes fórmulas, análogas a (1.2):

$$\begin{aligned} & \frac{1+(-1)^l}{2} v^0(z,t) = \\ & = - \int_0^{t-\varepsilon z} \left\{ E^{\alpha}(z,t-\tau) v_z^0(0,\tau) + (-1)^l E_z^{\alpha}(z,t-\tau) v^0(0,\tau) \right\} d\tau + \\ & + \frac{(-1)^l}{2} v^0(0,t-\varepsilon z) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$\forall z, t > 0, l=1,2$.

Aquí se supone que $v^0(z,t) \equiv 0 \quad \forall t < 0$.

De (1.5) se desprende que la solución del problema de frontera en la semirrecta para la ecuación (1.4) con condición de Neumann en el extremo y condiciones iniciales nulas viene dada por la función

$$v^0(z,t) = -2 \int_0^{t-\varepsilon z} E^{\alpha}(z,t-\tau) g(\tau) d\tau$$

donde $g(\tau) \equiv v_z^0(0,\tau)$.

Tiene lugar el

Teorema 2. Sea $\varphi(\tau) \in C^{(1)}[0,\infty)$, $\varphi(\tau) \equiv 0$ para $\tau \leq 0$. Entonces, para $t > 0$ uniformemente respecto a $z \in [0,\infty)$

$$\left| \int_0^t E^{\alpha\gamma}(z, t-\tau) \left(\gamma \frac{d}{d\tau} + 1 \right) \varphi(\tau) d\tau - \int_0^{t-\varepsilon z} E^{\alpha}(z, t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right| \rightarrow 0 \quad \forall \gamma \rightarrow 0.$$

No presentaremos aquí la demostración de este teorema, señalemos sólo que se demuestra sobre la base de comparar las soluciones fundamentales $E^{\alpha\gamma}(z, t)$ y $E^{\alpha}(z, t)$ para lo cual resulta cómodo expresar la última en la forma

$$E^{\alpha}(z, t) = \frac{\theta(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|z|}}{2\varepsilon\sqrt{k^2+\alpha^2}} \operatorname{sen} \left\{ \frac{\sqrt{k^2+\alpha^2}}{\varepsilon} t \right\} dk$$

Como conclusión de este epígrafe, analicemos el aspecto físico de los resultados obtenidos. De ellos se desprende que en presencia de viscosidad ($\gamma \neq 0$), a pesar de la suposición de que el fluido es compresible, la velocidad de propagación de la excitación en el medio descrito por la ecuación (1), en general, es infinita. Esto está relacionado con el hecho de que para $\gamma \neq 0$ la ecuación (1) no es hiperbólica, como ocurre en ausencia de viscosidad y, como consecuencia de ello, $E^{\alpha\gamma}(z, t)$ no se hace idénticamente nula para $|z| > t/\varepsilon$, sino que sólo tiende exponencialmente a cero al crecer $|z|$ para un $t > 0$ fijo. Sin embargo, como se desprende del teorema 2, para pequeñas γ en el proceso ondulatorio descrito existe un análogo de frente acústico que se propaga con la velocidad del sonido $c=1/\varepsilon$, el cual tiene delante de sí una especie de cola anterior exponencialmente decreciente que lo anuncia.

3. COMPORTAMIENTO PARA TIEMPOS GRANDES

Realizaremos el estudio de la solución para $t \rightarrow \infty$, siguiendo a [7], para los casos de $f(t)$ que tengan soporte compacto; es decir, $f(t) \equiv 0$ para t mayores que cierto T y $f(t) = \eta(t) e^{i\omega t}$, donde $\eta(t) \equiv 1$ para t mayores que cierta T y $\eta(0) = \eta'(0) = 0$. Para esto necesitamos el siguiente resultado.

Lema 1. $E_z^{\alpha\gamma}(z, t) \rightarrow 0 \quad \forall t \rightarrow \infty$ uniformemente para $z \in (0, \infty)$.

La demostración de este lema se puede efectuar basándose directamente en la expresión (1.1) y no la exponemos aquí.

Observación 1. El resultado del lema 1 se puede precisar. Como indica un análisis más detallado de la expresión (1.1) para $E_z^{\alpha\gamma}(z, t)$, si se cumplen las condiciones $t > t_0 > 0$, $4\varepsilon^2 - \alpha^2\gamma^2 \geq h^2 > 0$, tiene lugar:

$$\left| E_z^{\alpha\gamma}(z, t) \right| \leq \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma \frac{\alpha^2 t}{2\varepsilon^2}} + C_{ht_0} \frac{t^{1/4} e^{-t/\varepsilon}}{\gamma^{3/4}} \quad (2.1)$$

donde C_{ht_0} es una constante que depende sólo de h y t_0 .

Esta valoración muestra que en el caso de valores pequeños del parámetro de viscosidad $\gamma \left(\frac{1}{\gamma} \gg \frac{\gamma \alpha^2}{\varepsilon^2} \right)$ el comportamiento de $E_z^{\alpha\gamma}(z, t)$

para $t \rightarrow \infty$ se determina, fundamentalmente, por el primer sumando de la igualdad (2.1). Partiendo de esto, se puede introducir el tiempo característico de amortiguamiento $\theta_0 = \frac{2\varepsilon^2}{\gamma \alpha^2}$ igual al inverso del

coeficiente que acompaña al tiempo t en el exponente del sumando.

Observación 2. Del lema 1 se desprende que para cualquier $F(\tau) \in C[0, T]$, la integral del tipo

$$I_F(z, t) = \int_0^T E_z^{\alpha\gamma}(z, t-\tau) F(\tau) d\tau, \quad T > 0 \quad (2.2)$$

tiende a cero para $t \rightarrow \infty$ uniformemente para $z \in (0, \infty)$.

Supongamos que $f(t)$ en la condición de frontera (3) tiene soporte compacto; es decir, $f(t) \equiv 0$ para $t \geq T > 0$. En este caso, para tiempos $t > T$, la solución $v(z, t)$ se expresa en la forma (2.2) con

$$F(\tau) = -2 \left[\gamma \frac{d}{d\tau} + 1 \right] f(\tau)$$

Por esto, en virtud de la observación 2, llegamos al siguiente resultado.

Teorema 3. Si la función $f(t)$ en la condición de frontera (3) tiene soporte compacto, la solución $v(z, t)$ tiende a cero para $t \rightarrow \infty$ uniformemente para $z \in (0, \infty)$.

Supongamos ahora que $f(t)$ tiene la forma:

$$f(t) = \eta(t) e^{i\omega t}$$

donde $\eta(t) \equiv 1$ $\forall t \geq T > 0$ y $\eta(0) = \eta'(0) = 0$. Expresemos esta función en la forma

$$f(t) = (\eta(t) - 1) e^{i\omega t} + e^{i\omega t}$$

y coloquemosla en (1.3). Para $t > T$ tenemos

$$v(z, t) = -2 \int_0^T E_z^{\alpha\gamma}(z, t-\tau) \left[\gamma \frac{d}{d\tau} + 1 \right] [\eta(\tau) - 1] f e^{i\omega \tau} d\tau - \\ - 2 f (1 + i\omega) e^{i\omega t} \int_0^t E_z^{\alpha\gamma}(z, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau, \quad (2.3)$$

El primer sumando a la derecha en (2.3), en virtud de la observación 2, tiende a cero para $t \rightarrow \infty$, mientras que la integral en el segundo

sumando para $t \rightarrow \infty$ tiende a la transformada de Fourier respecto a τ de la función $E_z^{\alpha\gamma}(z, \tau)$. Así pues, llegamos a la igualdad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[v(z, t) e^{-i\omega t} \right] = -2 (t + i\omega) f F_{\tau \rightarrow \omega} \left[E_z^{\alpha\gamma}(z, \tau) \right] \equiv A_\omega(z) \quad (2.4)$$

Después de realizar cálculos sencillos, obtenemos que $A_\omega(z)$ tiene la forma:

$$A_\omega(z) = f e^{\beta(\omega)z} \quad (2.5)$$

donde

$$\beta(\omega) = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha^2 \gamma^2 \omega^2 + \varepsilon^2 \omega^2) - i\varepsilon^2 \omega^3 \gamma}}{\sqrt{1 + \gamma^2 \omega^2}}$$

aquí

$$\sqrt{k} = \sqrt{kT} e^{i\frac{1}{2}\arg k}, \quad \arg k \in [0, 2\pi)..$$

Es fácil ver que $\text{Re } \beta(\omega) < 0$ para $\gamma \neq 0$ y, por tanto, para viscosidad no nula las ondas no se propagan hacia adentro del fluido.

Mediante comprobación directa es fácil comprobar que $A_\omega(z)$, que comúnmente se llama amplitud límite, satisface la ecuación de las oscilaciones estabilizadas para la ecuación (2), es decir

$$L_z^\omega \left[A_\omega(z) \right] \equiv \left\{ e^{-i\omega t} L_{zt}^{\alpha\gamma} \left[A_\omega(z) e^{i\omega t} \right] \right\} = 0 \quad (2.6)$$

Formulemos estos resultados en forma de teorema:

Teorema 4. Si $f(t) = \eta(t) f e^{i\omega t}$, donde $\eta(t) \in C^{(2)} [0, \infty)$, $\eta(0) = \eta'(0) = 0$ y $\eta(t) \equiv 1 \quad \forall t > T$, la solución del problema (2)-(4) tiene amplitud límite $A_\omega(z)$ expresada por la fórmula (2.5) y que satisface la ecuación de las oscilaciones estabilizadas (2.6).

4. EXCITACIÓN DE LONGITUD DE ONDA CORTA

En este epígrafe se deducen fórmulas asintóticas para la solución del problema (2) - (4) para $\alpha \rightarrow \infty$, caso que físicamente responde a una excitación de onda corta.

Usando el desarrollo de Taylor es fácil comprobar la validez de la siguiente expresión para α grande:

$$e^{-\frac{\gamma}{2\varepsilon^2} (k^2 + \alpha^2)} \left| \frac{\text{sh} \left\{ \sqrt{\mu_{\alpha\gamma}(k)} t \right\}}{\sqrt{\mu_{\alpha\gamma}(k)}} - \frac{\text{sh} \left\{ \left(\gamma \frac{k^2 + \alpha^2}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{\gamma} \right) t \right\}}{\gamma \frac{k^2 + \alpha^2}{2\varepsilon^2}} \right| \leq \frac{C_T}{(k^2 + \alpha^2)^2}$$

donde $t \in [0, T]$ y C_T es cierta constante que depende sólo de T ; k es un número real. De aquí se obtiene la valoración uniforme respecto a z siguiente:

$$\left| \bar{E}_z^{\alpha\gamma}(z^*, t) - Q^{\alpha\gamma}(z, t) \right| \leq \frac{K_T}{\alpha^2}$$

donde $z > 0$, $t \in [0, T]$, y

$$Q^{\alpha\gamma}(z, t) = \frac{1}{2\gamma} e^{-\alpha z - \frac{t}{\gamma}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\gamma(k^2 + \alpha^2)} \exp \left\{ ikz - \frac{\gamma(k^2 + \alpha^2)t}{\epsilon^2} + \frac{t}{\gamma} \right\} dk \quad (3.1)$$

K_T es una constante que depende sólo de T .

Por consiguiente, para la solución $v(z, t)$ se obtiene que

$$\left| v(z, t) - q(z, t) \right| < \frac{2K_T T}{\alpha^2}$$

donde

$$q(z, t) = -2 \int_0^t Q^{\alpha\gamma}(z, t-\tau) \left[\gamma \frac{d}{d\tau} + 1 \right] f(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

La expresión explícita de $Q^{\alpha\gamma}(z, t)$ permite obtener fórmulas para $q(z, t)$ en forma de integrales simples:

$$q(z, t) = -2 \frac{e^{-\alpha z}}{\gamma} \int_0^t \left[\gamma \frac{d}{d\tau} + 1 \right] f(\tau) \operatorname{sh} \left\{ \frac{t-\tau}{\gamma} \right\} d\tau + \\ + \frac{z\epsilon e^{\frac{t}{\gamma}}}{2\gamma\sqrt{\pi\gamma}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{z^2\epsilon}{4\gamma(t-\tau)} - \gamma \frac{\alpha^2(t-\tau)}{\epsilon^2} \right\} d\tau$$

Aquí:

$$g(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\gamma}} f(\tau) + 2 \int_0^{\tau} e^{-\frac{\theta}{\gamma}} f(\theta) d\theta.$$

Así pues, la función $q(z, t)$ coincide con la solución $v(z, t)$ con exactitud de sumandos del orden $O(\alpha^{-2})$. Por comprobación directa puede verse que $q(z, t)$ satisface la condición de frontera (3), las condiciones iniciales (4) y también la ecuación (2) con exactitud de hasta términos del orden $O(\alpha^0)$.

Si $f(t)$ tiene soporte compacto, es decir, $f(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq T_0$, para la función $q(z, t)$ de (3.1) y (3.2) se puede obtener la valoración:

$$|q(z, t)| \leq C_f \frac{\exp \left\{ -\left[t - T_0 \right] \left(\frac{\alpha^2 \gamma}{\epsilon^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \right\}}{\left[t - T_0 \right] \frac{\alpha^2 \gamma}{\epsilon^2}} \quad \forall t \geq T_0$$

donde C_f es una constante que sólo depende de $f(t)$. De esta valoración se ve que para $\frac{\alpha^2 \gamma}{\epsilon^2} \gg \frac{1}{\gamma}$ el término principal de la asíntota después de terminar la acción de la excitación toma valores apreciables sólo para tiempos no mayores en orden que la magnitud $\theta_1 = \frac{\epsilon^2}{\alpha^2 \gamma}$.

Destaquemos que θ_1 para su forma es cercano al tiempo característico de amortiguamiento θ_0 obtenido para otra relación de los parámetros físicos correspondientes.

REFERENCIAS

1. Sliozin, N.A. (1955). *Dinámica de un líquido viscoso incompresible*. Moscú, GITTI.
2. Landau, L.D. y E.M. Lifshits (1988). *Hidrodinámica*. Moscú, Nauka.
3. Shatov, A.K. (1985). *Sobre el problema de Cauchy para el sistema linealizado de ecuaciones de Navier-Stokes considerando la compresibilidad*. Doklady AN SSSR, T. 285, No. 6, 1374-1376.
4. Marín Antuña, J. y O. Sotolongo Costa (1991). *Sobre una ecuación para oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso y compresible*. Revista Cubana de Física, Vol. XI, No. 3.
5. Hermander, L. (1965). *Operadores lineales diferenciales en derivadas parciales*. Moscú, Mir.
6. Komech, A.I. (1988). *Ecuaciones lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes*. Problemas Contemporáneos de Matemática. Direcciones Fundamentales. Tomo 31. (Resultados de Ciencia y Técnica. Biblioteca Central de la AC URSS). Moscú, 127-261.
7. Gabov, S.A.; B.B. Orazov y A.G. Sviéshnikov (1986). *Sobre la teoría no estacionaria de ondas internas*. Zhurnal Vichis. Matem. y Matem. Fiziki, T. 26, No. 8, 1223.

RESONANT INTERNAL FIELD EMISSION IN QUANTUM WELLS

M. de Dios Leyva and J. López Gondar, Department of Theoretical Physics, University of Havana.

ABSTRACT

A theoretical study of resonant tunneling in quantum wells subject to a constant electric field E_L is presented. The analysis is carried out in the framework of the simplified two-band Kane model. It is shown that the transmission coefficient (T) as a function of the electron energy exhibits a well defined resonant structure. Some interesting properties of $T(E)$ are reported.

RESUMEN

Se presenta un estudio del tunelaje resonante en pozos cuánticos sometidos a la acción de un campo eléctrico E_L constante. El análisis se lleva a efecto en los marcos del modelo simplificado de dos bandas de Kane. Se pone de manifiesto que el coeficiente de transmisión $T(E)$ como función de la energía del electrón presenta una estructura resonante bien definida. Se reportan además algunas otras propiedades interesantes de $T(E)$.

1. INTRODUCTION

During the last years theoretical and experimental researches on tunneling through double barriers [1-4], superlattices [5-6], and multiple quantum wells (MQW) [7], have clarified the mechanisms of current

transport in these semiconductor heterostructures. Two possible mechanisms have been suggested for the underlying physics of the tunneling process: resonant and sequential tunneling [4]. Both are known to lead to negative differential resistance in these structures.

Almost all the investigations developed up to now consider charge carriers moving in the conduction band (electrons) or in the valence band (holes) [8]. Only small attention have been paid to the study of electronic tunneling between states in the valence and conduction bands in MQW structures (Zener Tunneling). As far as we know only in [9] is carried out and experimental study of this important subject, where the observation of resonant Zener tunneling (RZT) in the AlInAs/GaInAs structure is reported.

The purpose of the present paper is to report some characteristic features of RZT in quantum wells (QW) developed in the framework of the simplified two-band Kane model.

2. SIMPLIFIED TWO-BAND KANE MODEL

To study the RZT we will consider a finite QW of width L subject to a constant electric field E_L applied along the positive direction of the well Z (Fig. 1). The QW consists of layers of 1 and 2 host semiconductors with energy gaps given by E_1 and E_2 , respectively. The origin of coordinates (energy) is taken at the interface between regions 1 and 2 (at the midgap position of semiconductor 2).

Following [10] to describe the electron dynamics in the framework of the simplified two-band Kane model we will use, in each host material, a Dirac-like kinetic energy operator. This leads to a system of four differential equations for the envelope functions that can be transformed in two equivalent decoupled pairs (Eq. (5) in [10]). Under the unitary transformation generated by the operator

$$U = (2)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

each one of these pairs of equations takes the form:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & E_{\text{eff}}(Z) \\ E_{\text{eff}}^*(Z) & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(Z) \\ F_2(Z) \end{bmatrix} = 0; \quad (1)$$

where $H_{11} = PK_z + V(Z) + FZ - E$; $H_{22} = -PK_z + V(Z) + FZ - E$; $E_{\text{eff}}(Z) =$

$E_G(Z)/2 + iPK$; P denotes the interband momentum matrix element, which will be assumed identical in both host materials; E is the energy; $E_G(Z) = E_2$ in the well and equal to E_1 in the barriers; $K_z = -id/dz$; $V(Z) = 0$ in the well and V_0 in the barriers, being V_0 the energy difference between the midgap position in each material; the barrier height in the conduction band (without applied field) is $(E_1 - E_2)/2 + V_0$; $K = (K_x^2 + K_y^2)^{1/2}$, where K_x, K_y are the wave vector components in a plane perpendicular to the growth direction of the QW, which are good quantum numbers; $F = eE_L$, being $-e$ the free electron charge.

In each host semiconductor the general solution of Eq.(1) can be expressed in terms of Weber's functions $D_n(Z)$ [11]. The continuity of these solutions at the interfaces allows to write down the integration constants for $Z > 0$, A_1 and B_1 , in terms of the corresponding constants for $Z < -L$, A_3 and B_3 :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

In Eq.(2), S is a 2×2 matrix which has the form $S = M_1^{-1}[t_1(0)]M_2[t_2(0)] \times M_2^{-1}[t_2(-L)]M_1[t_1(-L)]$ (3)

where subindexes 1 and 2 characterize the corresponding materials and $M_j[t_j(Z)]$ is a matrix whose elements are:

$$\begin{aligned} \{M_j[t_j(Z)]\}_{11} &= D_{ip_j}[t_j(Z)] \\ \{M_j[t_j(Z)]\}_{12} &= D_{ip_j}[-t_j(Z)] \\ \{M_j[t_j(Z)]\}_{21} &= -b_j D_{ip_j-1}[t_j(Z)] \\ \{M_j[t_j(Z)]\}_{22} &= b_j D_{ip_j-1}[-t_j(Z)] \end{aligned} \quad (4)$$

with $j = 1, 2$; and $p_j = [(E_j/2)^2 + P^2 K^2]/2FP$; $b_j = p_j(2FPi)^{1/2}/(E_j/2 + iPK)$; $t_j(Z) = (2i/PF)^{1/2} [FZ + V_j - E]$, being $V_1 = V_0$ and $V_2 = 0$.

Let us now assume that under the action of the electric field an electron, with energy E , moves from right to left in the valence band. Then, only a transmitted wave will appear in the conduction band. If under these

conditions the asymptotic behaviour of the solutions for $Z \rightarrow \pm\infty$ is calculated, following the criteria that the direction of propagation of a wave for the conduction (valence) band is the one in which its phase increases (decreases), we can obtain the following expression for the transmission coefficient:

$$T(E) = \left| S_{21} - S_{22} \exp(\pi p_1) \right|^{-2},$$

where S_{22} and S_{21} are the corresponding matrix elements of S .

3. NUMERICAL RESULTS AND DISCUSSION

In order to obtain some information about the properties of $T(E)$ we will suppose that $(E_1, E_2, V_0) = (0.5, 0.19, 0.1)$ eV and $P = 0.561$ eV-nm. A similar model of QW was considered in [12]. From now on we will only deal with the case $K = 0$ and $F > F_0$, being $F_0 = 2 \times 10^5$ eV/cm. With such a set of parameters the p -parameters in the Weber's functions are relatively small, which introduce important simplifications in the numerical calculations of $T(E)$. The energies corresponding to the points A, B, C in Figure 1 will be denoted by $E_A = -(E_2/2) + V_0 = -0.15$ eV, E_B , E_C , respectively.

The logarithm of $T(E)$ as a function of energy for $L = (15, 20)$ nm and $F = F_0$ is presented in Figure 2. From these curves and others not reported here we can draw the following conclusions:

(a) Each curve exhibits a well defined resonant structure (RZT), and the corresponding resonance energies are always greater than $E_B = E_2/2 - FL$. This is obvious from Figure 2 if we note that for $F = F_0$ and $L = (15, 20)$ nm the values of E_B are -0.205 and -0.305 eV, respectively.

(b) In each curve the peak value at the lowest resonance energy (fundamental peak) is greater than the others (secondary peaks).

(c) The study of a given peak (fundamental or secondary) for a fixed F and different L values shows that: (1) its resonance energy E_R decreases when L increases, taking the value E_A for a certain value of L ; (2) when $E_R > E_A$ the peak value decreases as $(E_R - E_A)$ increases; (3) for $E_R < E_A$ the fundamental peak can take values near or equal to 1. These results can be illustrated with the following example: for $F = F_0$ and $L = (10, 15, 19.2, 20)$ nm the fundamental peak values are $T(E_R) = (0.05, 0.5, 1, 0.97)$, with $E_R = (0.0299, -0.0712, -0.1546, -0.1705)$ eV, respectively. From these results it is obvious that the optimum values of

$T(E)$ are achieved when $FL > E_2 - V_0 + e_R$ where e_R is the resonance energy measured from E_B .

(d) The resonance energy E_R of a secondary peak can be greater than E_C . This takes place, for example, for the second secondary peak of curve (a) in Figure 2, where $E_C = -0.05$ eV and $E_R = 0.03$ eV.

On the other hand, it is not difficult to show that the energy level and the resonance width of quasibound states are the complex roots the equation:

$$S_{21}(E) - S_{22}(E)\exp(\pi p_1) = 0$$

To prove that these roots determine the resonance energies and the corresponding peak widths of $T(E)$, it is necessary to solve numerically this equation. This is a hard task because S_{21} and S_{22} are expressed through the Weber's functions of complex arguments and indexes. Hence, we followed another approach to find approximately the position of the quasibound levels. First, these levels were obtained in the parabolic band approximation using the approach reported in [13], but assuming that the effective masses inside and outside the well are different; and second, corrections due to nonparabolicity effects were included. The latter point was carried out calculating the differences between the corresponding energies obtained in the parabolic and nonparabolic (Eq. (1)) band models without electric field.

With this approach the fundamental quasibound levels for $F = F_0$ and $L = (15, 20, 30)$ nm are $(-0.085, -0.186, -0.386)$ eV, respectively; while the corresponding resonance energies associated with the fundamental peaks are $(-0.071, -0.170, -0.371)$ eV, respectively. A comparison of these results shows a reasonable agreement and, therefore, suggests that resonances in the transmissivity versus electron energy curve correspond to quasibound levels in the well.

Finally, the peak widths can be used to estimate the lifetime τ associated with the quasibound states. For the fundamental peaks shown in Figure 2 $\tau \sim 10^{-13}$ s.

In conclusion, the results obtained by means of the simplified two-band Kane model confirm the occurrence of RZT in QW, and could be useful to analyze other situations where more complicated band models are required. Although all numerical calculations were carried out for high electric field, we believe that the obtained conclusions remain valid for $F < F_0$, especially those related to the optimum value of $T(E)$. It is obvious that the study of RZT in MQW needs both theoretical and experimental further efforts. A more detailed analysis of this important topic is left for a subsequent publication.

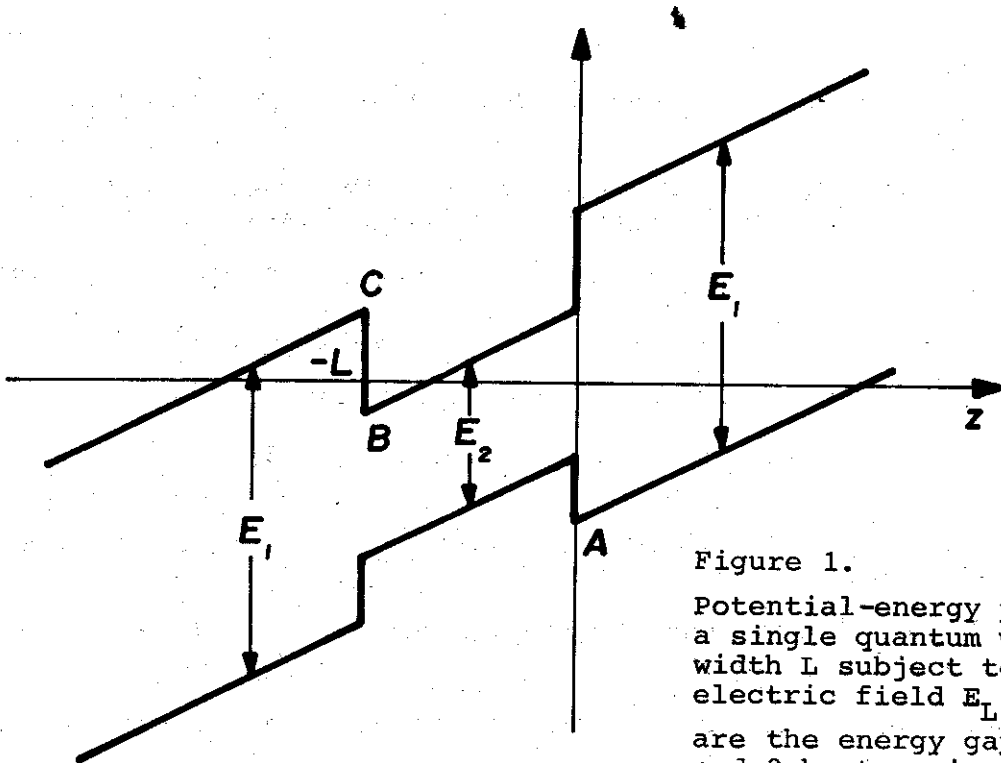


Figure 1.

Potential-energy profile for a single quantum well with width L subject to a constant electric field E_L ; E_1 and E_2 are the energy gaps in 1 and 2 host semiconductors, respectively.

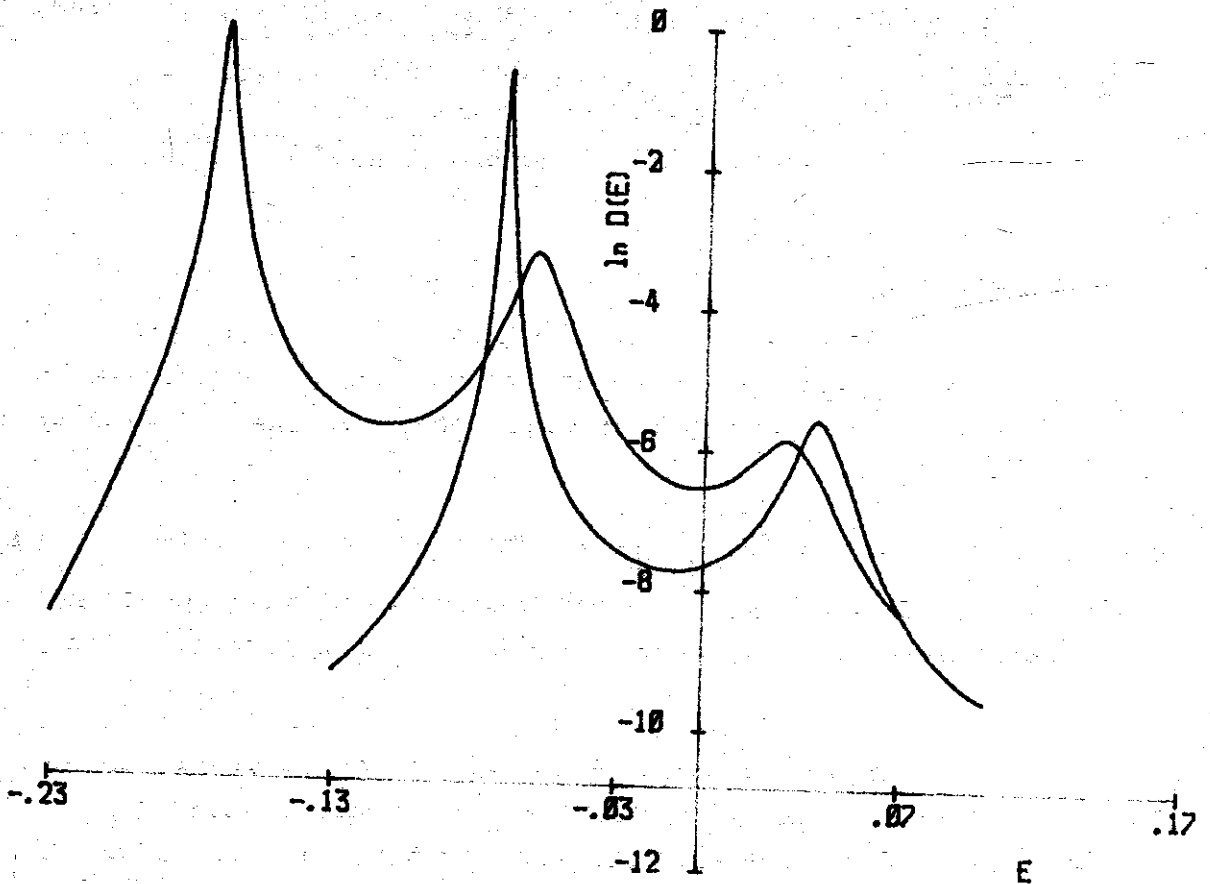


Figure 2. Logarithm of the transmission coefficient as a function of incident electron energy for $F = 2 \times 10^5$ eV/cm and L equal to 20 nm (curve a) and 15 nm (curve b), respectively. The arrows indicate the fundamental peaks.

REFERENCES

1. Chang, L.L., L. Esaki and R. Tsu (1974). Applied Physics Letters, 24, 593.
2. Sollner, T.C.L.G., W.D. Goodhue, P.E. Tannenwald, C.D. Parker and D.D. Peck (1983). Applied Physics Letters, 43, 588.
3. Ricco, B. and M. Ya. Azbel (1984). Physical Review B29, 1170.
4. Luryi, S. (1985). Applied Physics Letters, 47, 490.
5. Esaki, L. and L. L. Chang (1974). Physical Review Letters, 33, 495.
6. Davies, R.A., M.A. Kelly and T.M. Kerr (1985). Physical Review Letters, 55, 1114.
7. Capasso, F., K. Mohammed and A.Y. Cho (1986a). Applied Physics Letters, 48, 478.
8. Méndez, E.E., W.I. Wang, B. Ricco and L. Esaki (1985). Applied Physics Letters, 47, 415.
9. Allam, J., F. Beltram, F. Capasso and A.Y. Cho (1987). Applied Physics Letters, 51, 575.
10. Dios Leyva, M. de, R.P. Alvarez and J.L. Gondar (1984). Physica Status Solidi (b) 125, 221.
11. Kane, E.O. and E.I. Blount (1969). In Tunneling phenomena in Solids, edited by E. Burstein and S. Lundqvist, Plenum, New York, p. 81.
12. Dios Leyva, M. de and A.M. Rodríguez (1988). Solid State Communications, 66, 549.
13. Ahn, D. and S.L. Chuang (1986). Physical Review B34, 9034.

OBTENCION DE CRISTALES DE KDP PARA LA GENERACION DE SEGUNDOS ARMONICOS OPTICOS

Rolando Rodríguez, Federico L. Falcón, Carlos Arencibia, Humberto Mesa, Elsa Hernández, Instituto de Materiales y Reactivos para la Electrónica (IMRE). Universidad de La Habana.

RESUMEN

Se reporta la obtención de monocristales de KDP (KH_2PO_4) crecidos a partir de soluciones por el método de evaporación del solvente a temperatura constante. Estos fueron montados en una celda especialmente diseñada y construida para la generación de segundos armónicos.

ABSTRACT

The growing of single crystals of KDP (KH_2PO_4) from solutions by solvent evaporation at constant temperature method is reported. They were fixed in a specially designed cell for the second harmonics generation.

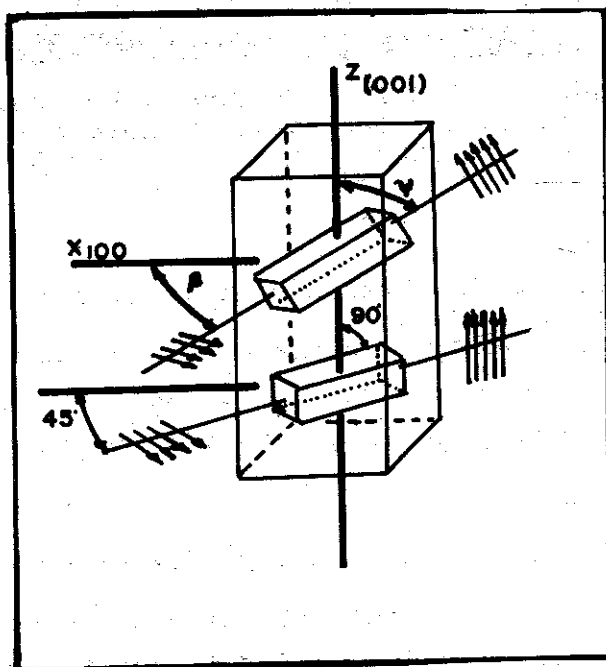
INTRODUCCIÓN

La óptica no lineal es un método poderoso para ampliar las frecuencias fijas que, en un número limitado, se obtienen de los diferentes tipos de láseres. A partir del primer experimento de Franken en 1961 este campo ha progresado rápidamente, a tal punto que en la actualidad puede ser obtenida radiación coherente sintonizable en toda la zona espectral desde los 190 nm hasta los 7 000 nm con altas potencias, ancho de bandas estrechos y buena eficiencia de conversión.

Existen una serie de cristales que son actualmente utilizados con este fin, entre ellos tienen un papel de primera importancia aquellos pertenecientes al sistema tetragonal, con simetría $\bar{4} 2m$, que poseen carácter uniaxial, birrefringencia negativa y con propiedades únicas en la generación de segundos armónicos (GSA) de la radiación coherente. Un principal representante de esta familia es el cristal de KDP (KH_2PO_4), crecido a partir de soluciones.

Estos cristales pueden ser orientados cristalográficamente con respecto al haz de la radiación de dos formas diferentes, definiéndose los tipos I y II de sintonía por ángulo. Para la sintonía angular tipo I el rango de operación del cristal es entre los 517 nm y los 1700 nm y para la sintonía angular del tipo II entre los 732 y 1700 nm. También es posible efectuar una sintonía del cristal por temperatura, estando su temperatura de máxima seguridad de operación alrededor de los 120°C . La temperatura de mínima seguridad de operación depende de la temperatura de transición del cristal, por debajo de la cual el cristal cesa su óptica no lineal y que es de -153°C . Para este tipo de sintonía el rango de trabajo va desde los 514 nm a -11°C hasta los 522 nm a $+100^\circ\text{C}$ [1-2].

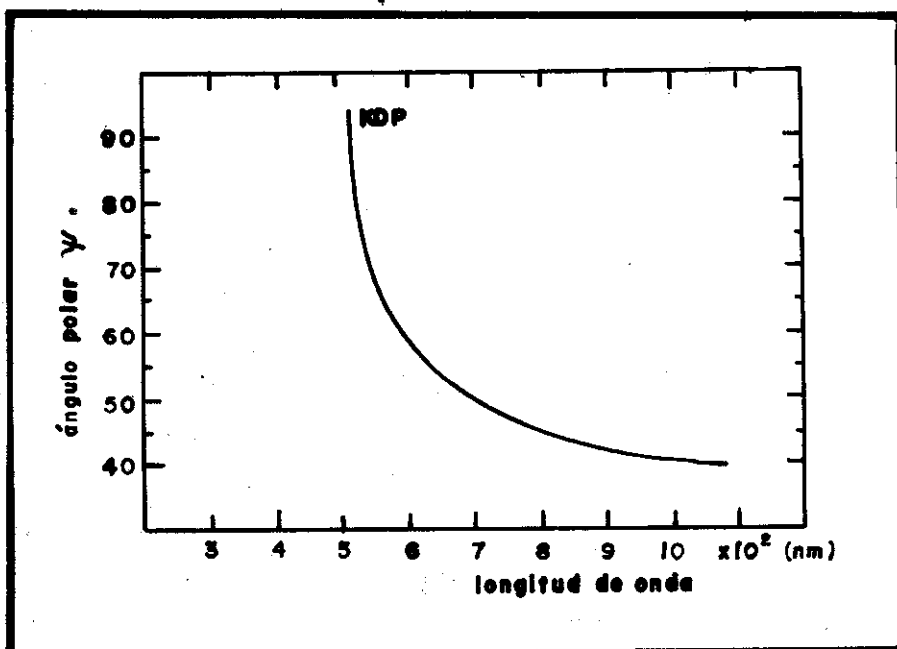
Figura 1. Orientaciones cristalográficas para sintonía angular del tipo I y por temperatura.



Las orientaciones cristalográficas para la sintonía angular de tipo I y la sintonía por temperatura de estos cristales se muestran en la Figura 1. Para una determinada longitud del cristal la eficiencia de conversión de la GSA depende fuertemente del ángulo ψ_m . Como se observa en la Figura 2, este ángulo es evaluado en dependencia de la longitud de onda. La región efectiva para obtener la GSA mediante la orientación de la muestra cristalina respecto al eje óptico se encuentra entre los 200 y los 800 nm.

Figura 2.

Comportamiento del ángulo ψ con respecto a la longitud de onda.



La sintonía angular tipo II requiere un ángulo de orientación diferente al del tipo I. Este proceso es muy eficiente particularmente para doblar la frecuencia de 1064 nm, al ser usados en procesos de fusión. La orientación para el proceso de tipo II se muestra en la Figura 3. En la Tabla I se muestran los ángulos utilizados en el KDP para la sintonía angular de los tipos I y II para diferentes frecuencias.

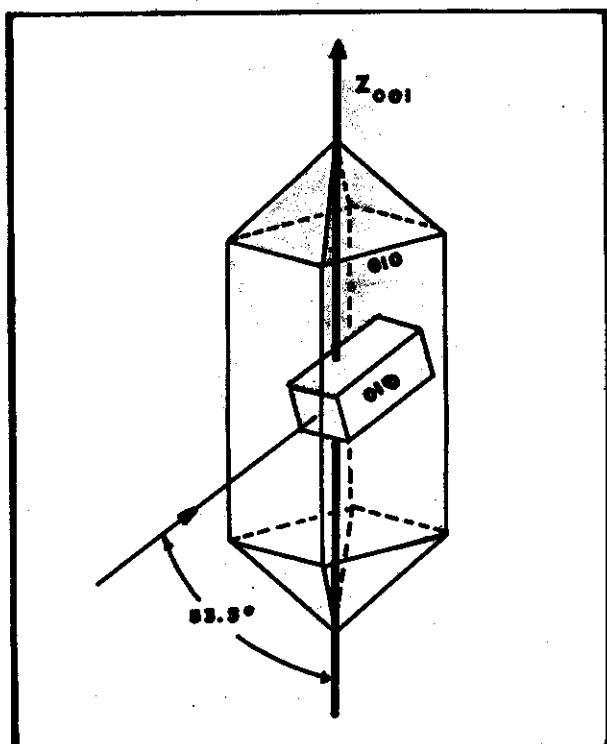


Figura 3. Sintonía angular del tipo II.

(nm) Longitud de onda	KDP	
	Tipo I grados	Tipo II grados
517.4	90	No Obtenible ↓
524.5	81.5	
600.0	60	
694.3	50.4	
707.0	49.6	
732.0	47.5	90
800.0	46.0	72
890.0	44	63.6
1058.0	40.3	59.1
1065.0	40.3	59.1
1700.0	No transparente	
6000.0		

Tabla I. Angulos para las sintonías angulares del tipo I y II.

Los principales parámetros electro-ópticos y como generador de segundos armónicos de este cristal se resumen en las Tablas II y III respectivamente.

Indice de Refraccion			Susceptibilidad no lineal $d \times 10^{12}$ m/V	Umbral de daño nominal GW/m^2	Absorcion lineal % cm	Aceptacion de temperatura $^{\circ}\text{C}\cdot\text{cm}$	Aceptacion angular mr.cm	Longitud usada cm	Eficiencia GSA %
λ	n_o	n_e							
347	1.54	1.49				3.5	1.0	2.5	20
530	1.51	1.47		17.0					
694	1.51	1.47	0.47	0.4	2.4				
1060	1.49	1.46	0.47	25.0	3.0				

Tabla II. Propiedades electro-ópticas para el KDP.

$d/dT(n_o - n_e)$ por $^{\circ}\text{C}$	0.7×10^{-5}
$\Delta T (^{\circ}\text{C})$	± 3.2
Coefficiente no lineal relativo al D-KDP	1.04
Fase - Acople:	
Angulo	90°
Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	-10

Tabla III. Coeficiente no lineal y birrefringencia térmica del KDP como GSA.

El crecimiento de monocristales de KDP desde soluciones ha sido realizado por diferentes métodos como son los de convección forzada [3], convección de concentraciones [4], disminución de temperatura [5] y evaporación de solvente a temperatura constante (ESTC), con resultados más o menos similares; sin embargo, este último resulta el más favorable para el control de los parámetros de crecimiento. Por ello, este método fue seleccionado para el crecimiento de nuestros cristales.

CRECIMIENTO DE MONOCRISTALES

En el crecimiento por el método de ESTC existen diversas variaciones en el diseño del cristalizador básico, incluyendo la utilización de enfriadores termoeléctricos para el control de la evaporación [6].

Dadas nuestras posibilidades tecnológicas se diseñó y construyó un cristalizador termostatado simple. La Figura 4 muestra un esquema de la instalación construida. La fuente térmica resistiva (1) se situó externamente para evitar problemas de corrosión y asimetrías térmicas; además, tal disposición tiende a evitar nucleaciones inconvenientes que con frecuencia ocurren el fondo del cristalizador. Como sensor de temperatura fue utilizado un termómetro (2) de contacto TGL 4850 con apreciación de 0.2 °C, acoplado a un sistema de control eléctrico.

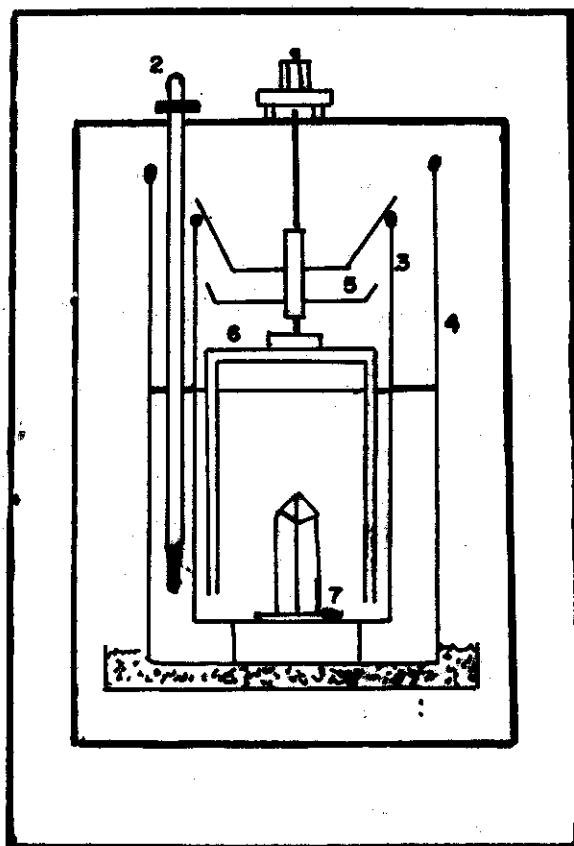


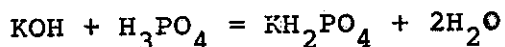
Figura 4. Esquema del cristalizador termostatado.

El recipiente cristalizador (3) utilizado posee 1 L de capacidad y 180 mm de altura; el recipiente termostatador (4) guarda la relación 1:5.

El control de la evaporación es efectuado a través de un sifón, que descansa sobre una platina (5) situada sobre la parte superior del cris-

talizador. La agitación se efectuó mediante dos paletas plásticas simétricas (6) con respecto al eje central. La velocidad de rotación era regulable y automáticamente invertía el sentido de rotación cada 3 minutos. La velocidad de agitación utilizada fue de 18 rpm. La semilla (7) fue situada en el fondo y centro del cristalizador, adherida a una lámina de teflón.

La sal de KDP fue sintetizada según la ecuación:



mezclando 168 g de KOH en 500 mL de agua con 164 mL de H_3PO_4 en 500 mL de agua. Los reactivos utilizados fueron de la firma AnalaR y el compuesto fue controlado con análisis espectroscópico de radiación ultravioleta.

En todos los casos la solución fue preparada calentando agua desionizada de 0.5 $\mu\text{S}/\text{cm}$ a 70 °C y disolviendo 350 g de la sal en condiciones de agitación. La disolución fue filtrada inmediatamente e introducida en el termostato y dejada reposar durante 24 h a la temperatura de crecimiento. Posteriormente fue eliminada la deposición cristalina que se produce en el fondo y a continuación introducida la semilla en el cristalizador.

La semilla fue cortada perpendicularmente al eje z, lavada con agua desionizada y calentada a la temperatura de crecimiento antes de colocarla en el cristalizador. El eje cristalino z coincide en orientación con la vertical de la instalación. Sólo se da la opción de crecer a una sola cara en la dirección z.

Se ajustó la temperatura de crecimiento en 40°C y dicho proceso se mantuvo durante 10 días. Con temperaturas superiores se produjo la tendencia a cristales velados como resultado de la aparición de inclusiones provocadas por la alta velocidad de crecimiento. Ajustando este último parámetro se obtuvieron cristales de dimensiones adecuadas y buena transparencia, sin apreciarse en ellos defectos macroscópicos característicos en este método de crecimiento, como son la curvatura de las superficies, aparición de cristales gemelos y huecos superficiales. En algunos casos aparecieron pequeñas veladuras causadas por frecuentes interrupciones en el fluido eléctrico. La Figura 5 muestra una foto de los cristales obtenidos.

CONSTRUCCIÓN DE CELDAS PARA LA GENERACIÓN DE SEGUNDOS ARMÓNICOS

Con posterioridad a la obtención de monocristales de KDP de buenas características ópticas se procedió a su utilización en la construcción de celdas para la generación de segundos armónicos mediante sintonía angular del tipo I. Para ello dichos cristales fueron orientados, cortados, pulidos y posteriormente expuestos a la radiación laser de 1064 nm, se obtuvo una GSA con un 8 % de eficiencia. Se considera que este



Figura 5.
Uno de los cristales crecidos.

valor de eficiencia puede ser sensiblemente aumentado al mejorar las condiciones de elaboración anteriormente descritas.

Las muestras ahí obtenidas fueron encapsuladas, con el fin de evitar su deterioro, en el sistema mostrado en la Figura 6.

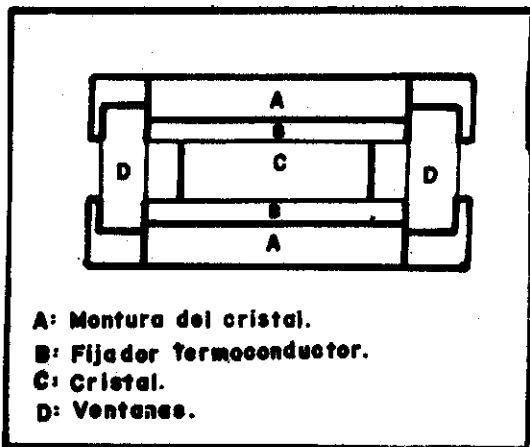


Figura 6. Esquema de la celda de protección del cristal para su uso.

Para la elaboración de estas celdas GSA deben tomarse en consideración algunas cuestiones básicas, como es el hecho que la máxima interacción del haz luminoso con el medio no lineal ocurre cuando el mismo se propaga en el plano 110. Cuando dicho haz incide con un ángulo de 90° con el eje óptico se alcanza una eficiencia óptima del proceso. Esta es la orientación utilizada para la sintonía por temperatura. Para la sintonía angular el haz posee un ángulo dependiente de la frecuencia del laser. En general

es preferible utilizar la sintonía por temperatura (ST) que la sintonía angular (SA) dado que esta última brinda menor eficiencia por diferentes causas. Sin embargo, el rango de sintonía que permite la ST se limita al orden de 10 nm para una variación de 100 °C. Los cristales de GSA sintonizados angularmente se orientan con una desviación de hasta 10 minutos con respecto al ángulo polar exacto para una frecuencia dada. La celda en cuestión debe ser colocada en un sistema óptico que permita una sintonía fina de 10 segundos para un uso adecuado.

En la SA el alineamiento del ángulo Ψ es un paso crítico. Frecuentemente se dibuja una línea en una de las caras del cristal para marcar la posición del eje óptico. El cristal debe ser sintonizado alrededor de un eje perpendicular a esta cara. La rotación del cristal alrededor de un eje perpendicular a la cara pulimentada o a la 3ra cara, no resulta tan crítico como la sintonía fina de Ψ . La necesidad del montaje de estos cristales como muestra la Figura 6 se debe a su carácter higroscópico y su deterioro por choques térmicos.

Por ello, estas monturas comprenden un fijador termoconductor y un sellado hermético del cristal, que se logra con un fluido inerte o con nitrógeno seco.

Durante el uso en laboratorios, donde las variaciones de temperatura pueden ser mayores de 0.5 °C, se precisa la sintonía frecuente de estas celdas. Esto puede evitarse mediante la combinación de SA y ST. En este caso, el cristal se opera a una temperatura de 40 °C para eliminar los efectos de los cambios de temperatura sobre el cristal.

CONCLUSIONES

Se diseñó y construyó satisfactoriamente un sistema cristallizador termos-tatado apto para el crecimiento de KDP por el método de ESTC. Se realizaron crecimientos en busca de condiciones óptimas hasta obtener cristales de dimensiones adecuadas con calidad satisfactoria.

Con los cristales obtenidos se construyeron celdas para la generación de segundos armónicos (GSA). Además del diseño de estas celdas, se explican algunos aspectos de índole práctico para el uso de las mismas.

REFERENCIAS

- [1] Franken, P.A. (1961). Phys. Rev. Lett. 7, 118.
- [2] Miller, R.C. (1965). Appl. Phys. Lett. 6, 77.
- [3] Parvov, V.F. (1967). Sov. Phys. Cryst. 12, 374.
- [4] Beyustin, A.V. (1965). Sov. Phys. Cryst. 10, 743.
- [5] Belouet, C. (1973). Act. Elect. 16, 339.
- [6] Vannay, L. (1987). Act. Phys. Hung. 61, 2, 197.

TRES MODELOS PARA LA CURVA TENSION-HUMEDAD EN ALGUNOS TIPOS DE SUELOS

María Elena Ruiz Pérez*, Angel Utset Suástegui*, Andrés Lau Quan*, Julián Herrera Puebla**, María Antonia Llanos**

* Instituto Superior de Ciencias Agropecuarias de La Habana (ISCAH).

** Instituto de Investigaciones de Riego y Drenaje (IIRD).

RESUMEN

Se comparan los modelos de retención de agua de Gardner, de Brooks y Corey y de Van Genuchten para diferentes suelos y se obtiene el mejor ajuste para el modelo de Van Genuchten. Se ofrecen los valores de los parámetros para este modelo para algunos agrupamientos cubanos.

ABSTRACT

Water retention models of Gardner; Brooks and Corey and Van Genuchten are compared for different soils. The better adjust is obtained for Van Genuchten model. There are shown the values of the Van Genuchten parameters for some kinds of cuban soils.

INTRODUCCIÓN

La capacidad que tiene el suelo de retener el agua es reconocida como una de sus propiedades que hace posible la vida de las plantas al propiciarle agua necesaria durante el período de tiempo que media entre las lluvias o los riegos.

Esta propiedad puede explicarse de forma sencilla por el hecho de que el suelo constituye un medio poroso que, desde el punto de vista físico, está formado en primera aproximación por un conjunto de tubos capilares o también llamados "cuellos de botellas" (Dullien y col., 1974) de diferentes diámetros; estos tubos (poros) en virtud de los fenómenos de capilaridad y tensión superficial, retienen el agua. Si se ejerce en el suelo una succión dada, el agua va abandonando los poros de mayor radio hasta un cierto límite, y en dependencia del valor de dicha succión y del volumen de los poros de radio menores que ese cierto límite, en el suelo quedará una humedad determinada.

El valor de la succión (tensión) puede obtenerse experimentalmente mediante aparatos tales como el tensiómetro y la prensa Richards, y el de la humedad por método gravimétrico o mediante la sonda de neutrones. Con el conjunto de valores de tensiones y humedades es posible construir un gráfico que recibe el nombre de curva tensión-humedad o curva característica, la cual expresa la influencia de la estructura, la porosidad, la distribución de poros y la adsorción sobre el agua en el suelo (Hillel, 1971).

El ajuste de un modelo analítico a la curva tensión-humedad permite estimar valores no medidos experimentalmente y por tanto la determinación de magnitudes tales como la capacidad de campo, la microporosidad, el agua aprovechable, la conductividad hidráulica no saturada y otras.

Por otra parte, las funciones tensión-humedad, cada una de las cuales expresa analíticamente un modelo, y la conductividad hidráulica, permiten a partir de la ecuación de Richards (Richards, 1931) estimar y/o predecir procesos como la infiltración, el drenaje, la evaporación y otros.

En el presente trabajo se exponen los modelos de Gardner (1970), Brooks y Corey (1964; 1966) y Van Genuchten (1980) valorándose el ajuste a los datos experimentales de cada uno a partir de la suma de cuadrados residual media. Finalmente se brindan los valores de los parámetros del modelo de Van Genuchten para algunos agrupamientos de suelos cubanos.

MATERIALES Y MÉTODOS

El primer modelo considerado en este estudio para la curva tensión-humedad es el de Gardner (1970) cuya ecuación es

$$\theta = a h^{-b} \quad [1]$$

donde a y b: parámetros para el ajuste a los datos experimentales.

θ : humedad

h: tensión

Este modelo ha sido empleado por Herrera y col., (1985) y resulta un caso particular del planteado por Brooks y Corey (1964; 1966) para cuando la humedad residual θ_r se considera cero.

El modelo de Brooks y Corey plantea

$$\theta = \begin{cases} \theta_r + (\theta_s - \theta_r) (h/h_b)^{-\lambda} & \text{para } h/h_b \geq 1 \\ \theta_s & \text{para } h/h_b < 1 \end{cases} \quad [2]$$

donde

θ_r : humedad residual (humedad resultante para tensiones muy altas),

θ_s : humedad de saturación,

h : tensión,

h_b : tensión de burbujas (tensión para la cual el aire comienza a desplazar el agua en los poros del suelo,

λ : parámetro de distribución de poros.

Como se observa, esta función plantea una variación brusca de θ con h para $h = h_b$. Según Van Genuchten y Nielsen (1985) esto no se observa para curvas tensión-humedad obtenidas "in situ" en las cuales las variaciones de θ con h resultan suaves y continuas.

La humedad residual θ_r resulta indispensable para la utilización de [2]; sin embargo, en la práctica sólo se dispone de una parte de la curva tensión-humedad. Mualem (1976) propone un algoritmo para su estimación.

Como segundo modelo a analizar está el que emplea la ecuación [2] estimado θ_r según Mualem (1976). Para la determinación de λ , h_b y θ_r se elaboró un programa en lenguaje Turbo Pascal soportado sobre MS-DOS para microprocesadores IBM compatibles.

El tercer modelo. (Van Genuchten, 1978; 1980) emplea una función sigmoideal para la curva tensión-humedad la cual contempla variaciones continuas y suaves de θ con h para todo el rango de humedades en la zona cercana a la saturación. La expresión analítica correspondiente es

$$\theta = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha h)^n]^m} \quad [3]$$

donde α , m y n : parámetros para el ajuste a los datos experimentales.

Para la determinación de los parámetros y de θ_r se utilizó el programa SOHYP (Van Genuchten, 1978) en lenguaje FORTRAN IV adaptado para su empleo en microprocesador IBM compatible.

Un total de 97 conjuntos de datos tensión-humedad para suelos Ferralíticos, Aluviales, Pardos, Arenosos y Oscuros Plásticos, ubicados en diferentes provincias del país fueron obtenidos en una prensa Richards y facilitadas por el Instituto de Investigaciones de Riego y Drenaje (IIRD).

Como criterio de ajuste y comparación se utilizó la suma de cuadrados residual media (SCRM) definida por

$$SCRM = \frac{\sum_{i=1}^n (\theta_{est} - \theta_{exp})^2}{n'} \quad [4]$$

donde

- n' : número de pares de datos tensión-humedad,
- θ_{est} : valor de humedad estimado por el modelo,
- θ_{exp} : valor de humedad determinado experimentalmente.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Tabla 1 se observan los valores medios SCRM correspondientes a los tres modelos para los agrupamientos de suelos utilizados y cuando se consideran todos los casos.

Tabla 1. Valores de SCRM obtenidos para los tres modelos.

Agrupamiento	Van Genuchten (VG)*	Gardner (G)*	Brooks y Corey (BC)*
Ferralíticos	0.815	1.754	5.061
Aluviales	5.604	14.910	15.630
Pardos	3.081	1.935	5.376
Arenosos	1.938	7.189	2.430
Oscuros	2.750	8.330	20.430
Todos	2,470	6.062	11.350

* Todos los valores deben multiplicarse por 0.0001

Para cada uno de los agrupamientos fue realizado un análisis de varianza entre los valores de SCRM correspondiente a los tres modelos tomándolos por pares. En la mayoría de los casos el valor de SCRM para el modelo de Van Genuchten no resultó significativamente diferente de los restantes como puede observarse en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados del análisis de varianza realizado entre los modelos VG-G, VG-BC y G-BC (95 % de probabilidad).

Agrupamiento	VG-G	VG-BC	G-BC
Ferralíticos	S	S	S
Aluviales	S	S	NS
Pardos	NS	NS	S
Arenosos	S	NS	S
Oscuros	S	S	S
Todos	S	S	S

Posteriormente no se hizo distinción entre los agrupamientos, considerando el total de las 97 curvas; en este caso se encontró que existían diferencias significativas entre los tres modelos, observándose un menor valor de SCRM para el modelo de Van Genuchten, lo cual significa un mejor ajuste del modelo a los datos experimentales. Por otra parte, para el modelo de Brooks y Corey con θ_r estimada según Mualem (1976), se obtuvo el mayor valor de SCRM y por tanto el peor ajuste a los datos experimentales.

En la Tabla 3 se muestran los valores medios de los parámetros del modelo de Van Genuchten para los agrupamientos de suelos utilizados.

Tabla 3. Valores de los parámetros del modelo de Van Genuchten.

Agrupamiento	θ_r fracción pss	α cm-1	n	m
Ferralíticos	0.1828	0.0093	1.6011	0.3754
Aluviales	0.1882	0.0125	1.8656	0.4640
Pardos	0.1662	0.0086	1.7214	0.4191
Arenosos	0.1165	0.0197	1.9110	0.4767
Oscuros	0.3187	0.0061	1.8243	0.4518
Todos	0.2204	0.0093	1.7407	0.4255

Como se observa, el menor valor de θ_r corresponde a los arenosos, resultado lógico dado que estos son los que menos agua retienen, por su parte a los Oscuros Plásticos les corresponde el mayor valor.

A partir de la expresión [3] se puede notar que el valor del parámetro "n" determina que las variaciones de la humedad a medida que aumenta la

tensión, sean más o menos bruscas. Para los suelos arenosos se obtuvo el mayor valor de "n", lo cual concuerda con el hecho de que estos suelos, como ya fue señalado, pierden rápidamente su humedad. Sin embargo, para otros agrupamientos la interpretación de los valores de "n" no queda clara, por ejemplo, la semejanza entre los valores obtenidos para Aluviales y Oscuros Plásticos. Dado que estos valores medios se calcularon con todos los datos de cada agrupamiento para todas las profundidades, es posible que esto influya en los resultados, por tanto, se hace necesario un estudio teniendo en cuenta la profundidad y en especial qué tipo de horizonte le corresponde.

CONCLUSIONES

El modelo de Van Genuchten en general logra un mejor ajuste a los datos experimentales de la curva tensión-humedad en comparación con los modelos de Gardner y de Brooks y Corey, en los suelos del país estudiados, ubicados en distintas provincias.

REFERENCIAS

- Brooks, R.H. y A.T. Corey (1964). Hydraulic properties of porous media. Colorado State Univ. Hydrology Paper No. 3, p. 27.
- (1966). Properties of porous affecting fluid flow. J. Irrig. Drain Div., Am Soc. Civ. Enf., 92:61-88.
- Herrera, P.J., C. Greco, M.A. Llanos (1986). *Curvas tensión-humedad para algunos suelos cubanos. Suelo y agua. Actas del Seminario de La Haba. Orstom. París.*
- Hillel, D. (1971). Soil an Water. Physical Principles and processes. Academic Press. N.Y. p. 288.
- Mualem, Y. (1976). A new model for predicting the hydraulica conductivity of unsaturated porous media. Water Resoour. Res. 12(3): 513-522.
- Nielsen, D.R., K. Reichardt, P. Wieeranga (1983). Characterization of field -measured soil- water properties. In isotope and Radiation techniques in soil physics and irrigation studies, IAEA:55-78.
- Van Genuchten, M. Th. (1980). A closes-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soil. Soil Sci. Soc. Am. J. 44:892-898.
- Van Genuchten, M. Th. y D.R. Nielsen (1985). *On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils. Annale Geophysicae 3(5):615-628.*
- Van Genuchten, R. (1978). Calculating the unsaturated hydraulica conductivity with a new closes form analytical model. Research Report 78-WR-08 Dept. of Civil Eng., Princeton, New Jersey, p. 63.

PROPIEDADES CINÉTICAS DE LOS PORTADORES DE CORRIENTE EN ALEACIONES DE $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0 \leq x \leq 0.12$) DOPADAS CON ESTAÑO

G.A. Ivanov, Instituto Estatal Pedagógico "A.I. Hertsen", Leningrado.
J.A. Capó Sánchez, I.S.P. Frank País García.

RESUMEN

Mediciones de las componentes del efecto Hall, termo-f.e.m. y conductibilidad eléctrica en aleaciones monocristalinas de $(\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x)\text{Sn}$ ($0 \leq x \leq 0.12$) permiten calcular las movilidades de los portadores de carga a partir de los puntos singulares ($R_{231} = 0$). Además se determina teóricamente el coeficiente R_{123} , expresado en función de las movilidades y de otros datos reportados en la literatura.

ABSTRACT

Hall effect experimental measurements, thermo-emf, and electric conductivity in single crystal alloys of $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0 \leq x \leq 0.12$) permit to calculate the mobility of the charge carriers in accordance with the models proposed. The parameters of the charge carriers have been determined from singular points ($R_{123} = 0$) allowing to calculate other components of the Kinetic effects.

INTRODUCCIÓN

Las mediciones de la susceptibilidad magnética en aleaciones monocristalinas de $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ dopadas con Sn en un amplio intervalo de

temperaturas permiten establecer la temperatura a la cual X_1 alcanza el valor mínimo. Esto ocurre cuando el nivel de Fermi se encuentra situado en el punto medio de la separación entre los extremos L de zonas correspondiente a huecos y electrones /1/.

A partir de los valores de la masa efectiva para los grupos de portadores T y L; y de sus respectivas leyes de dispersión /2, 3, 4/ se puede determinar la posición de los extremos de zona en un intervalo de temperatura en el cual la influencia de la zona H puede despreciarse /5/, mientras que utilizando los datos según /6/ para la zona H se puede valorar el comportamiento de los portadores de carga hasta la temperatura de fusión /7/.

El conocimiento de la posición de los extremos de zona, la masa efectiva de los portadores de carga, así como la posición del nivel de Fermi conducen a una simplificación considerable del número de incógnitas en el sistema de ecuaciones, expresadas en función de las componentes del tensor magnetorresistencia generalizado, lo que permite determinar la movilidad de los portadores de carga.

RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los materiales utilizados presentan una pureza inicial de 5N para el Bismuto y de 6N para el Antimonio y el Estaño respectivamente. El método empleado en el crecimiento de los monocristales fue el de recristalización zonal /8/. Las muestras fueron cortadas mediante arco eléctrico a un tamaño de $2 \times 2 \times 15 \text{ mm}^3$ siguiendo las principales direcciones cristalográficas. La composición y homogeneidad de los monocristales fue determinada por espectroscopia atómica y micro sonda de rayos-X.

Los datos experimentales fueron tomados de /9,10/ y mediciones complementarias del presente trabajo mostradas en los gráficos de las Figuras 1-4. De los resultados experimentales, se puede determinar el punto de transición del coeficiente Hall (R_{231}) por el valor nulo, así como los valores de la termo-f.e.m. y conductibilidad eléctrica para este punto.

Estos puntos singulares permiten de una forma más simple determinar la movilidad de los portadores de carga, y conociendo la masa efectiva de estos calcular el tiempo de relajación. Este parámetro en las aleaciones de Bi-Sb dopadas con Sn desempeña un rol fundamental debido a la significativa dispersión entre las zonas, posibilitando inferir en la probabilidad de transición entre zonas: $L_v - L_s$, $L - T$, $L - H$, $T - H$, etc.

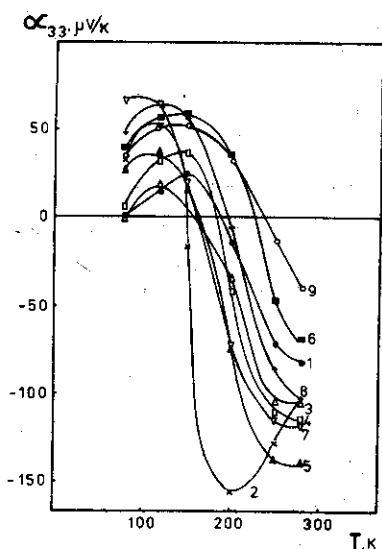


Figura 1. Dependencia térmica de la termo-f.e.m. diferencial α_{33} en monocristales de $(\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x)\text{Sn}$.

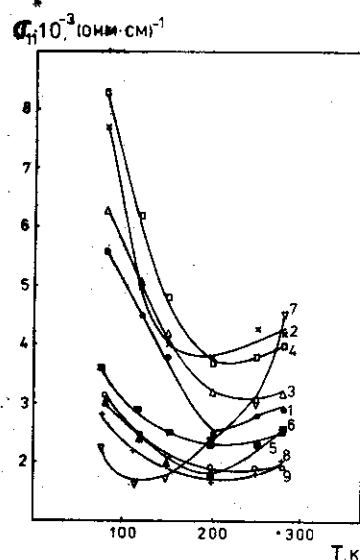


Figura 2. Dependencia térmica de la conductibilidad eléctrica σ_{11} en monocristales de $(\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x)\text{Sn}$.

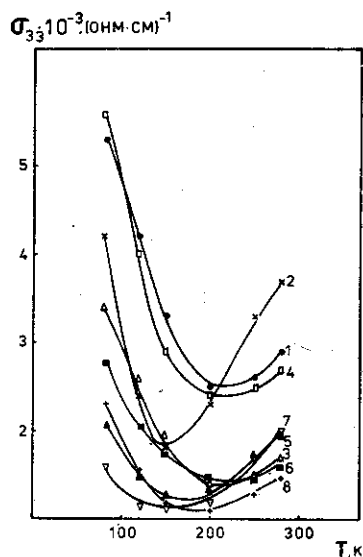


Figura 3. Dependencia térmica de la conductibilidad eléctrica σ_{33} en monocristales de $(\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x)\text{Sn}$.

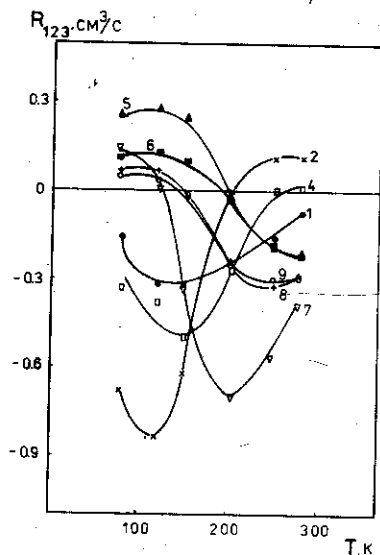


Figura 4. Comportamiento de la componente de Hall R_{123} con la temperatura en monocristales de $(\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x)\text{Sn}$.

CÁLCULO DE LA MOVILIDAD

Suponiendo que una pequeña cantidad de estaño no influye significativamente en la posición de los extremos de zonas en las aleaciones de Bi - Sb, entonces la posición del nivel de Fermi puede calcularse a partir del número de estas impurezas /7/. Además las concentraciones parciales, así como la termo-f.e.m. de cada grupo se considera que no se desvían notablemente de sus respectivos valores.

Para calcular la movilidad se utilizan las fórmulas del trabajo /11/. Las mismas están basadas en la suposición de la aditividad de las contribuciones de cada grupo portador de carga presente, siendo:

$$R_{231} \sigma_{11} \sigma_{33} = ep^T U_1^T U_3^T + ep^L (U_3^+)^2 - en (U_3^-)^2 \quad (1)$$

$$R_{123} \sigma_{11}^2 = ep^T (U_1^T)^2 + ep^L U_1^+ (U_2^+ \cos^2 \theta + U_3^+ \sin^2 \theta) - \\ - en U_1^- (U_2^- \cos^2 \theta + U_3^- \sin^2 \theta) \quad (2)$$

$$\sigma_{11} = ep^T U_1^T + 0.5 ep^L (U_1^+ + U_2^+ \cos^2 \theta + U_3^+ \sin^2 \theta) + \\ + 0.5 en (U_1^- + U_2^- \cos^2 \theta + U_3^- \sin^2 \theta) \quad (3)$$

$$\sigma_{33} = ep^T U_3^T + ep^L U_3^+ + en U_3^- \quad (4)$$

En las fórmulas (2) y (3) se consideró la inclinación de los elipsoides, mientras que en la (1) y (4) la desviación puede eliminarse de acuerdo con /12/.

Estas ecuaciones pueden completarse con las relaciones entre las movi-
lidades /13/, dadas por;

$$U_1 : U_2 : U_3 = \alpha : \beta : 1 \quad (5)$$

válidas para los grupos L, considerando la ley de dispersión de acuerdo al modelo de Lax.

En dependencia de la posición del potencial químico, para las aleaciones en las cuales $R_{231} = 0$, se determinan las concentraciones de los porta-
dores p^T , p^L , n a partir de la condición de electroneutralidad.

$$P_{Sn} = P_T + P_L - n \quad (6)$$

De acuerdo con la relación (5), las ecuaciones (1), (3) y (4) pueden escribirse:

$$0 = ep^T U_1^T U_3^T + ep^L (U_3^+)^2 - en (U_3^-)^2 \quad (7)$$

$$\sigma_{11} = ep^T U_1^T + A ep^L U_3^+ + A en U_3^- \quad (8)$$

$$\sigma_{33} = ep^T U_3^T + ep^L U_3^+ + en U_3^- \quad (9)$$

$$\alpha_{33} \sigma_{33} = \alpha^T ep^T U_3^T + \alpha^+ ep^L U_3^+ - \alpha^- en U_3^- \quad (10)$$

donde

$$A = 0.5 (\alpha + \beta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0.89$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (7) - (10) para las movi-
lidades, en la suposición de que a la temperatura en la cual $R_{231} = 0$, la influen-
cia del grupo H puede despreciarse, entonces se obtiene:

$$U_1^T = [(\sigma_{11} - A\sigma_{33}) + A ep^T U_3^T] / ep \quad (11)$$

$$U_3^- = [\sigma_{33}(\alpha^+ - \alpha_{33}) - ep^T(\alpha^+ - \alpha^T) U_3^T] / en(\alpha^+ + \alpha^-) \quad (12)$$

$$U_3^+ = [\sigma_{33}(\alpha^- + \alpha_{33}) - ep^T(\alpha^- + \alpha^T) U_3^T] / ep(\alpha^+ + \alpha^-) \quad (13)$$

Sustituyendo (11), (12) y (13) en (7), se determina U_3^T , lo que permite determinar las restantes movilidades.

Los resultados de los cálculos son mostrados en la Tabla 1. La temperatura (T) señalada corresponde a la temperatura de transición R_{231} por el valor nulo. μ_T^* representa el valor del potencial químico generalizado calculado para los huecos T a esta temperatura. La numeración de las muestras de acuerdo con su composición están en correspondencia con los números de los gráficos experimentales de las Figuras 1 - 4.

Tabla 1

No.	(Bi _{1-x} Sb _x)Sn _y	T	μ_T^*	u_3^T	u_3^L	u_3^L	$R_{123}^{teo.}$	$R_{123}^{exp.}$
	(% ato.)	(K)	-	($\frac{cm^2}{V.s}$)	($\frac{cm^2}{V.s}$)	($\frac{cm^2}{V.s}$)	($\frac{cm^3}{C}$)	($\frac{cm^3}{C}$)
1	x=4; y=0.05	194	3.0	24	280	3 000	-0.7	-0.3
2	x=4; y=0.1	170	5.7	24	1800	-1 600	-0.1	-0.2
3	x=4; y=0.2	190	7.5	6.3	230	140	-0.1	-0.1
4	x=4; y=0.3	181	10.9	- 3.6	1.5	180	0.03	0.1
5	x=9; y=0.09	163	4.9	4.5	190	1.1	0.5	0.2
6	x=9; y=0.27	168	10.0	2.3	-1.8	1 100	0.17	0.02
7	x=12; y=0.11	128	7.7	5.3	74	-33	0.1	0.1
8	x=12; y=0.23	138	11.5	-5.0	-2100	65	0.05	0.05
9	x=12; y=0.30	143	12.9	10	-2400	-14	0.08	0.04

En la Tabla 1 se observa que para algunas aleaciones se obtienen valores negativos de las movilidades, constituyendo un resultado erróneo, debido a la suposición de la aditividad de los grupos de los portadores de carga sin considerar las transiciones entre zonas. La teoría de transiciones entre zonas aún no ha sido elaborada lo suficiente que permita calcular de forma cuantitativa estos efectos.

A partir de los valores calculados de las movilidades y de las mediciones de σ_{11} , se calcula la componente de Hall R_{123} por medio de la ecuación (2), encontrándose una satisfactoria correspondencia entre los valores experimentales (R_{123}^{exp}) y teóricos (R_{123}^{teo}), corroborándose la validez del modelo de zonas utilizado /7/.

CONCLUSIONES

Conociendo la posición de los extremos de zonas y la densidad de masa efectiva para una posición del nivel de Fermi, se puede determinar la concentración de los portadores en cada zona. Utilizando las ecuaciones de transporte, basadas en la suposición de una contribución aditiva de los grupos de portadores de carga, se calcula la movilidad de estos. Este cálculo demostró, que para determinados contenidos de estaño se obtuvieron movilidades negativas, interpretándose como la no validez de la aditividad de los grupos de portadores de carga.

A partir de los puntos singulares de las curvas experimentales ($R_{123}=0$) se puede comprobar la posición de los extremos de zonas. Para estas componentes con valor nulo, se determinan los parámetros de los portadores de carga, permitiendo calcular las componentes no nulas de R_{123} .

REFERENCIAS

1. Ivanov, K.G. (1975). Ispolzavanie anizotropii magnitnom bospriimchivosti dlia analiza zonnnoi struktupie splavov Bi - Sb. Autoreferat. Leningrad, 18 p.
2. Ponomarev, Y.G. (1984). Energeticheskii spekt nositelei zariada v uzkocheleviex poluprovognikax i polumetallax. Autoreferat. Moscú, 55 p.
3. Mac Clure, J.W., K.H. Choi (1977). *Energy Band Model and Properties of Electrons in Bismuth*. Sol. State Com., v. 21, No. 1, p. 1015-1019.
4. Lax, B., J.G. Mavroides (1960). *Cyclotron Resonance*. Sol. State Phy., v. 11, p. 261-304.
5. Capó Sánchez, J. (1985). Dvizhenie ekstremumov zon b splavax $Bi_{1-x}Sb_x$ ($0 \leq x \leq 0.12$) b chirokom temperaturnom intervale. Autoreferat. Leningrad, 13 p.
6. Rodionov, N.A., G.A. Ivanov, K.G. Ivanov, N.A. Redko (1981). *Issledovanie valentnoi zone splavov $Bi_{1-x}Sb_x$ ($0.17 \leq x \leq 0.19$)*. Fiz. Tve. Tela, v. 23, No. 11, p. 3421-3424.
7. Ivanov, G.A., J. Capó Sánchez (1989). Desplazamiento de los Extremos Energéticos en las aleaciones de $Bi_{1-x}Sb_x$ ($0 \leq x \leq 0.12$) en un Amplio Intervalo de Temperaturas. Trabajos Científico-Metodológicos de los I.S.P., v. 9.
8. Capó Sánchez, J., R. Pérez Rosell, M. Campistrous Pérez (1987). *CreCIMIENTO de Monocristales de Bi - Sb por el Método de Recristalización por Zonas*. Rev. Cub. Fís., v. VII, No. 2, p. 63-66.
9. Yakovleva, T.A. (1971). *Issledovanie elektricheski i galvanomagnitnix svoistv splavov bismut-surma s koncentrastiei surme do 22 at. % v intervale temperatur 77-300 K*. Tesis C. Dr., Leningrad, 131 p.
10. Xudiakoval, I. (1970). *Izuchenie valetnoi zone splavov bismut-surma metodom varirovania urovnia ximichescovo potentsiala puteon legirobania splavov olovom*. Tesis C. Dr., Leningrad, 149 p.
11. Zitter, R.N. (1962). *Small-field Galvanomagnetic Tensor of Bismuth at 4,2 K*. Phy. Rev., v. 127, No. 5, p. 1471-1480.

12. Abeles, B., S. Meiboom (1956). *Galvanomagnetic Effects in Bismuth*. Phys. Rev., v. 101, No. 2, p. 544-550.
13. Rodionov, N.A., N.A. Redko, G.A. Ivanov (1979). *Kineticheskie iavlenia v splavax $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$ s malin soderyaniem dirok zone L_8* . Fiz. Tve. Tela, v. 21, No. 9, p. 2556-2562.

LASER CON GEOMETRIA DE FILAMENTO (STRIPE) EN ESTRUCTURAS OBTENIDAS POR EPITAXIA LIQUIDA EN REGIMEN DE BAJA TEMPERATURA CON ESPESOR DE CAPA ACTIVA SUBMICRONICA

Esperanza Purón Sopena, IMRE, Universidad de La Habana.

RESUMEN

En el trabajo se presenta la obtención de un laser semiconductor con confinamiento separado utilizando la técnica de epitaxia desde fase líquida, lográndose en el mismo un espesor de capa activa entre 100 y 200 Å, con corriente de umbral de 300 A/cm². A esta estructura se le hizo contacto en geometría stripe y trabajó con densidad de corriente umbral de 600 A/cm².

ABSTRACT

The growth and characterization of AlGaAs/GaAs SCH-Laser (separate-confinement heterostructure Laser) is described. The laser structure was grown by liquid phase epitaxy (L.P.E.) with active layer thickness 10 - 20 nm and 300 A/cm² of threshold. With this stripe geometry a $J = 600$ A/cm² have been obtained.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más difíciles de resolver en los laser de inyección es la tendencia a trabajar en filamentos. El filamento es una región muy fina de un laser que trabaja como tal, pero en su zona vecina por pequeñas inhomogeneidades en la estructura (que pueden ser debidas al modo de obtención) comienza a trabajar a corrientes mayores que la umbral. Estos

filamentos tienden a hacer la estructura inestable, además introducen ruido y cuando se incrementa la corriente por encima de la umbral (I_{th}), entonces sucede que la estructura funciona como multifilamentos.

Este problema se alivia pasando la corriente por estrechos filamentos (stripes) en vez de por toda el área y así la radiación de estos laser es el resultado de la acción de algunos filamentos. La geometría de contacto stripe disminuye la corriente umbral, asegura mejor control de la propagación del modo transversal y mejora la unión con la fibra óptica.

Los laser con stripe sin confinamiento óptico y eléctrico en la región de generación permiten disminuir la I_{th} desde 75 hasta 100 mA en la región del stripe y trabajar en régimen continuo de operación [1-4] pero el intervalo en que se logra un solo modo y una sola frecuencia en el régimen de generación es pequeño. Una disminución posterior del ancho del contacto stripe S (que es de 10-15 μm) conlleva a un aumento de la densidad de corriente umbral, esto se debe a que se hacen importantes los mecanismos de corriente laminar y la salida de los portadores por difusión de costado.

En los laser con confinamiento separado (LCS) el crecimiento de I_{th} no ocurre hasta $S = 1-2 \mu m$, y esto permite disminuir el ancho del contacto S , lo que es favorable, ya que permite disminuir I_{th} entre 9 y 15 mA, aumentar el intervalo de existencia de un modo y una frecuencia de generación hasta $I = (1.5 - 3) I_{th}$ y se eliminan los saltos en la característica $I - V$ [5-8].

De acuerdo con lo reportado en [9] en laser enterrados (buried) con confinamiento separado, se logró régimen continuo con $I_{th} = 13 \text{ mA}$ y $S = 1.5 \mu m$ en la longitud de onda $\lambda = 1.3 \mu m$

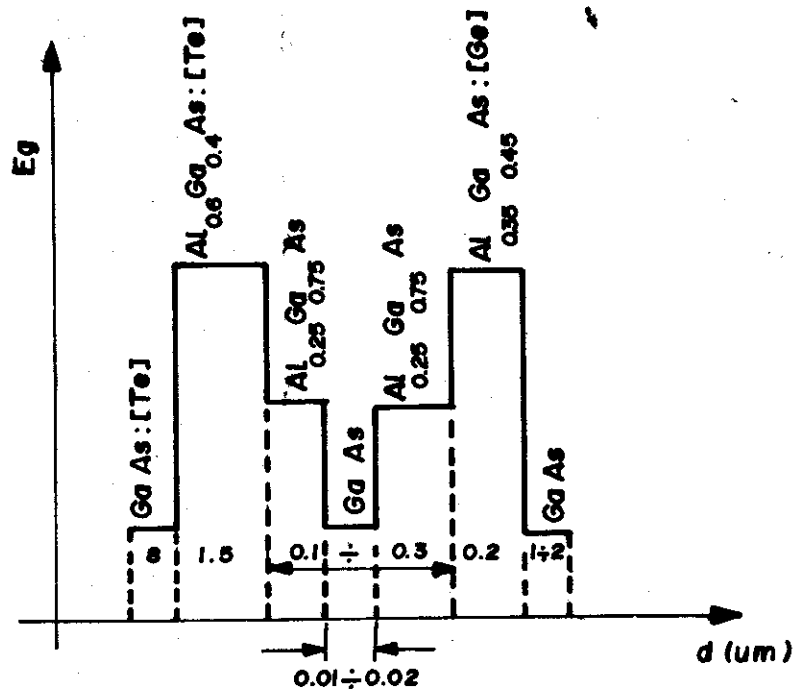
En el presente trabajo se obtienen laser con geometría de contacto de filamento y laser enterrados sobre la base de AlGaAs/GaAs con confinamiento separado y con espesor de capa activa entre 0.01 - 0.02 μm .

OBTENCION DE LA ESTRUCTURA

Se ha reportado la obtención de laser con espesor de capa activa submicrónica por MBE [10] y MOCVD [11]. Por LPE han sido obtenidos en el sistema InGaAsP por [12].

El perfil de las estructuras investigadas con confinamiento separado se muestra en la Figura 1.

El problema de crecer estructuras basadas en el sistema AlGaAs con espesores de capa activa submicrónica se resolvió disminuyendo el espesor de la capa de transición, cristalizando el fundido isotérmico el cual se cambia por otros en un bote de tipo pistón [13].



**FIG.1- PERFIL E_g vs. ESPESOR DE CAPA DEL LCS
CON ESPESOR DE CAPA ACTIVA $0.01 \div 0.02 \mu m$**

Para obtener las estructuras antes mencionadas con espesores de capa activa entre $0.01 - 0.02 \mu m$, la capa de transición debe ser menor de $0.005 \mu m$, esto se asegura, por ejemplo, retirando el sustrato de la solución y después mojando con otro nuevo fundido. De esta forma fueron producidos los laser reportados en [12]. Sin embargo, esto no puede ser utilizado para la obtención de los LCS en el sistema AlGaAs a causa de la presencia de una capa de óxido en la superficie del fundido y en la capa, de ahí que en este caso el bote de pistón tenga ventajas determinantes.

Esta es la causa de la limpieza de capa de óxido, asegurándose también un crecimiento constante ya que la capa que crece nunca queda sin fundido encima, pero esto trae también como consecuencia que no se pueda eliminar la presencia de la capa de transición que a $800^\circ C$ se sabe que alcanza espesores de $1 \mu m$ y que entre $650 - 600^\circ C$ es de $0.02 - 0.03 \mu m$ [13].

Esto cuando se desea crecer la región activa submicrónica es altamente perjudicial, y por ello se escoge para crecer la capa de la guía de ondas, el intervalo térmico entre $550 - 500^\circ C$, con esto y disminuyendo la velocidad de cristalización se tiene la posibilidad de controlar con precisión el espesor de las capas crecidas, ya que se han obtenido velocidades de crecimiento entre $10 - 1 \text{ nm/s}$ las cuales son comparables a las velocidades de crecimiento en MBE y MOCVD.

PREPARACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS

Sobre un sustrato tipo n de GaAs ($N_d = 1,1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$) orientado según el plano (100), se crece una capa buffer n de GaAs:Te, después se crece el emisor de gap ancho N-Al_{0.6}Ga_{0.4}As:Te. Las capas de la guía de ondas y la

zona activa no fueron dopadas. El intervalo de cristalización de la zona activa fue entre 530 - 529°C durante 30 s .

Seguidamente se crece la capa del segundo emisor y la capa de contacto. Para fabricar laser con resonador Fabri-Perott se depositan contactos y se clivan con cuatro caras espejos, sin cubierta antirreflectante. La longitud del resonador fue de entre 500 y 700 μm con un ancho de 100 μm . Se excitaron con corriente de impulso de 1 μs con frecuencia de 1 kHz a 300°K.

La línea de generación para los laser planos es de 1.43 eV, el espectro de emisión se muestra en la Figura 2. Se prepararon con esta estructura laser con geometría stripe y laser enterrados que se muestran en la Figura 3.

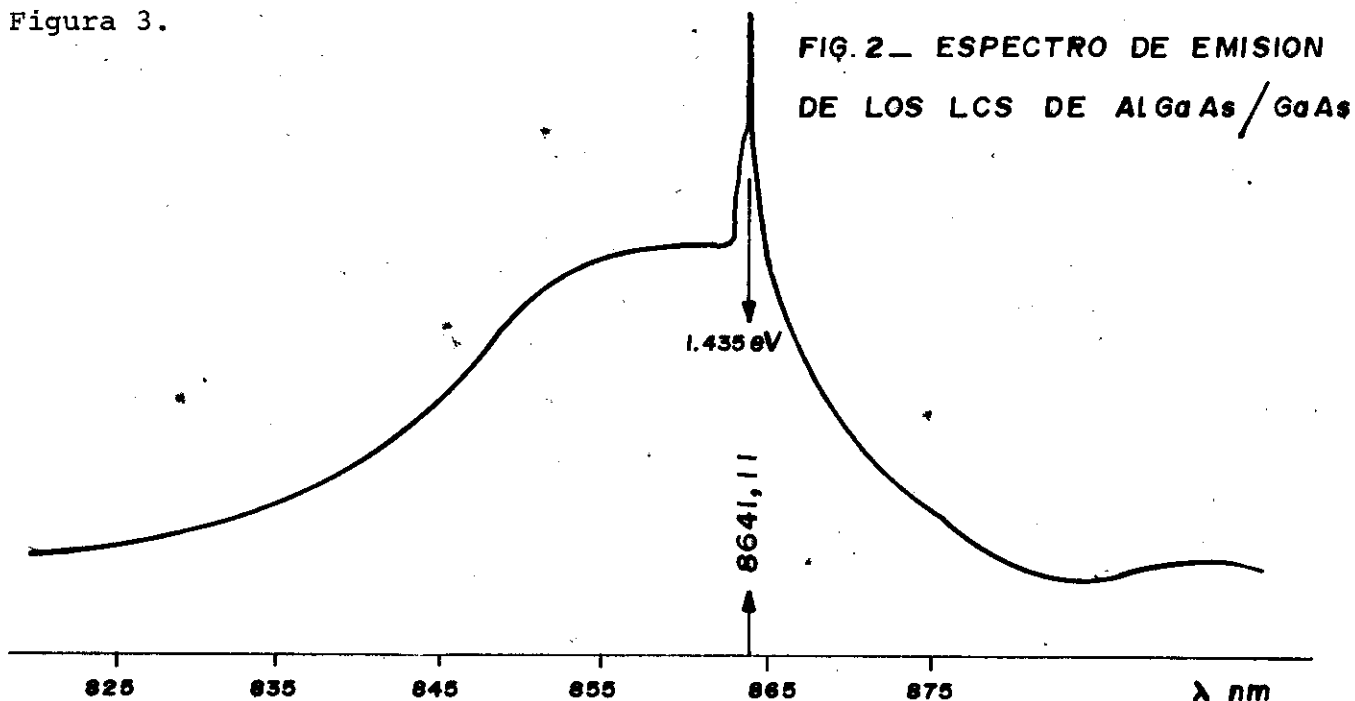
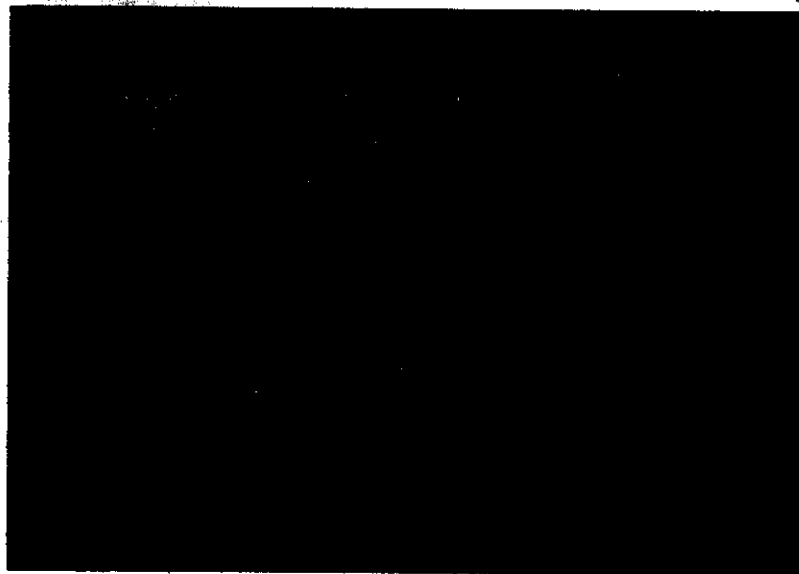


FIG.3- SEM DE LA ESTRUCTURA LCS CRECIDA EN CANALES,
(LASER ENTERRADO) (x2500)



RESULTADOS

En la Figura 4 se muestra la característica watt-ampérica de los laser planos. Se puede ver la corriente umbral de 300 A/cm². En la Figura 5 se ve una cadena de laser funcionando con I absoluta de 500 mA.

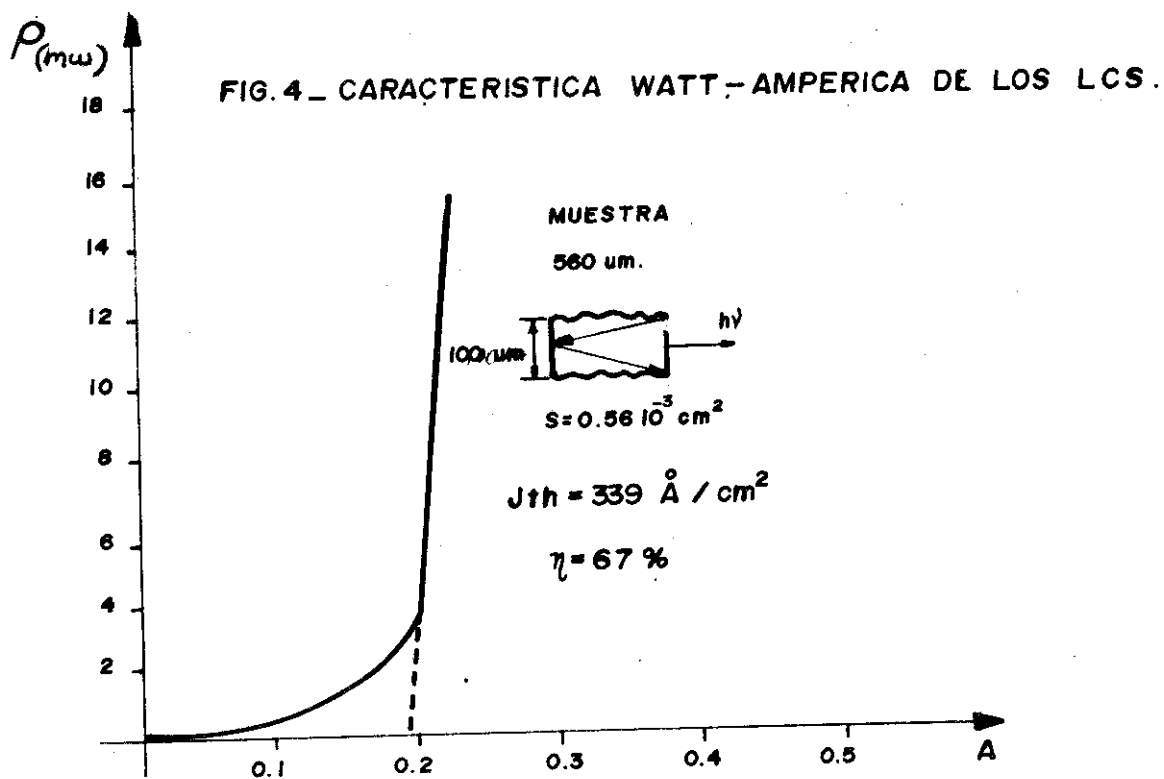
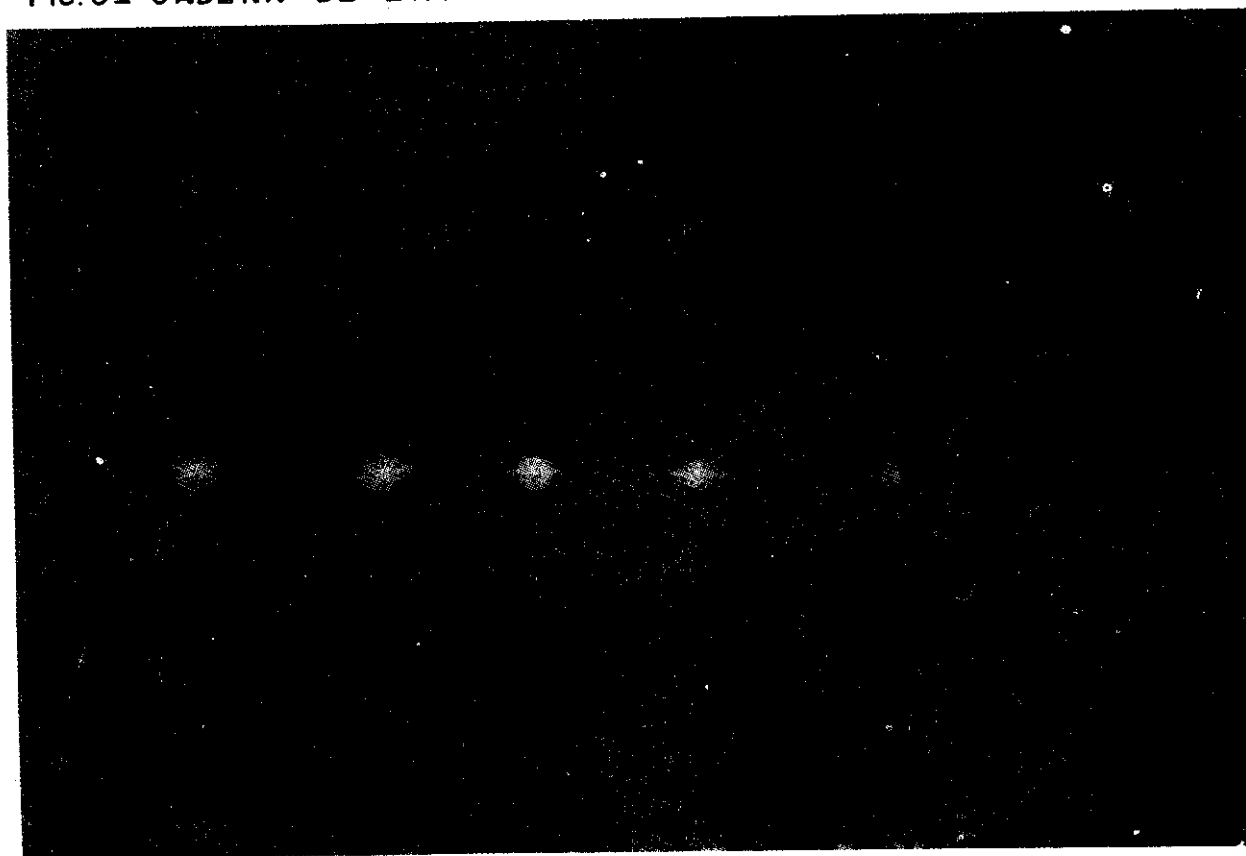


FIG. 5 - CADENA DE LASER TRABAJANDO



CONCLUSIONES

Se reporta en el trabajo la obtención de laser con confinamiento separado con espesor de capa activa entre 100 y 200 Å con corriente umbral de 300 A/cm² con comportamiento semejante a los obtenidos por MBE y MOCVD. Esta estructura con contacto en geometría stripe trabajó con una corriente umbral del orden de 600 A/cm²

Este trabajo fue realizado en los laboratorios del Instituto IOFFE de la Academia de Ciencias de la URSS, Leningrado.

REFERENCIAS

- [1] Ripper, J.E., J.C. Dymont, L.A. D'Asaro, T.L. Paoli (1971). Appl. Phys. Lett., 18, 155
- [2] Dymont, J.C., L.A. D'Asaro, J.C. North, B.J. Miller (1972). Proc. IEEE (Lett.), 60, 726.
- [3] Hsieh, J.J. (1979). J. of Quant. Electron., VQE-15, 694.
- [4] Blancoett, H., S. Margalet, A. Yariv (1982). Appl. Phys. Lett., 41, 587.
- [5] ----- (1982). Appl. Phys. Lett., 41, 585.
- [6] Chen, T.R., L.C. Chin, K.L. Yu, V. Koren, A. Yariv (1982). Appl. Phys. Lett., 4, 1115.
- [7] Nagai, H., Y. Nogushi, K. Takaei (1980). J. of Appl. Phys., 19, 1200.
- [8] Tsukada, T., R. Ito, H. Nakashima (1973). IEEE J. Quant Electron., VQE-9, 356.
- [9] Mito, I., M. Kitamura, Kabarachi, Ke, Kabayachi, Ko (1982). Electron. Lett., 18, 953.
- [10] Sang, T. (1982). Appl. Phys. Lett., 40, 217.
- [11] Kasement, D., C.S. Hong, W.B. Patte (1982). Appl. Phys. Lett., 41, 910.
- [12] Garbusov, D.Z., I. Arsentiev, L. Vavilova, A. Tikunov, E. Tulashvich (1985). Fiz. Tekh. Poluprovdn. 19, 1108.
- [13] Alferov, Zh Y., V.M. Andreev, S.G. Konnikov, V.R. Larionov, B.V. Pushnyk (1976). Krist und Technik, 8, 1013.

MONTAJE DE UN SISTEMA PARA LA DETERMINACION DEL ANCHO DE LINEA DE RESONANCIA FERROMAGNETICA

A. Iglesias Cerveto, Laboratorio Central de Telecomunicaciones
A. González Arias e I.V. Guerasimenko, Departamento de Física Aplicada,
Facultad de Física, Universidad de La Habana

RESUMEN

El uso de dispositivos sobre la base de ferritas es muy amplio; pero en cada caso, las propiedades del material a utilizar están determinadas por su aplicación específica. En algunos casos de ferritas para dispositivos de microondas, el valor del ancho de la línea de resonancia ΔH , relacionada a las pérdidas de energía en el material, es un parámetro muy importante para ser tenido en cuenta. En este trabajo se describe el montaje de un sistema para la determinación de ΔH y los resultados obtenidos al caracterizar ferritas de LiZnMnTi a la frecuencia de 812 MHz.

ABSTRACT

The spreading of ferrite-based devices is very wide but, in every case, the properties of the material in use is determined by its specific application. In some cases of ferrites for microwave devices, the line width of the ferromagnetic resonance ΔH , related to the energy losses in the material, is a very important parameter to be taken into account. In this paper a system is described for the measurement of the line width ΔH at low microwave frequencies, and the results obtained when measuring LiZnMnTi ferrites at 812 MHz.

1. INTRODUCCIÓN

El empleo de dispositivos basados en materiales de ferrita en los sistemas de radiocomunicaciones es muy amplio. Sin embargo, en cada caso particular las exigencias de uso requieren materiales con cualidades muy específicas, y resulta indispensable determinar experimentalmente una serie de parámetros característicos en dependencia del uso específico que se le dará a la ferrita en cuestión. En el caso de las microondas, uno de los parámetros de mayor interés es el ancho de la línea de resonancia ferromagnética ΔH . Este parámetro se relaciona con las pérdidas de energía en el seno del material cuando este se encuentra bajo la acción de un campo magnético variable de alta frecuencia.

A continuación se describe el montaje de un sistema para la medición de ΔH y los resultados obtenidos en muestras de ferrita de LiZnMnTi a la frecuencia de 812 MHz.

2. RESONANCIA FERROMAGNÉTICA

Los materiales magnéticos presentan el efecto de resonancia ferromagnética cuando, en presencia de un campo magnético constante H_0 , se aplica otra variable en el tiempo $h(t)$ y normal al primero /1/. La resonancia tiene lugar cuando la frecuencia de la señal aplicada coincide con la frecuencia de precesión $\omega_0 = \gamma H_0$ (frecuencia de precesión de los momentos magnéticos de los átomos del material que poseen momento magnético no nulo alrededor de la dirección de H_0); $\gamma = ge/2mc$ es la constante giromagnética, donde g es el factor de Landé, c la velocidad de la luz y e/m la relación carga/masa del electrón.

Si H_0 es tal que la ferrita está saturada, la magnetización del material toma su valor máximo M_s . En ese caso es posible establecer la siguiente relación entre las componentes m_i de la magnetización adicional originada por el campo variable $h(t) = h_0 e^{j\omega t}$ y las componentes h_i de la amplitud de dicho campo /2,3/.

$$\begin{vmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{xx} & X_{xy} & 0 \\ X_{yx} & X_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{vmatrix} \quad (1)$$

Los elementos X_{ij} de la matriz susceptibilidad poseen parte real e imaginaria y cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} X_{xx} &= X_{yy} \\ X_{yx} &= X_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

Considerando la onda electromagnética en el seno del material como formada por dos campos magnéticos circularmente polarizados, rotando en sentidos opuestos (+ y -) con frecuencia angular ω , la susceptibilidad puede ser expresada como

$$X_{\pm} = X'_{\pm} - jX''_{\pm} \quad (3)$$

donde $X'_{\pm}$ y $X''_{\pm}$ se obtienen al agrupar la parte real e imaginaria de los términos en (2). El término $X''_{\pm}$ representa las pérdidas de energía por absorción en la muestra a cualquier frecuencia, y tiene la forma

$$X''_{+} = \frac{\omega_m \tau}{(\omega_0 - \omega)^2 \tau^2 + 1} \quad (4)$$

donde $\omega_m = 4\pi M_s$ y τ es el tiempo de relajación de los momentos magnéticos atómicos.

Manteniendo constante la frecuencia ω y variando el campo H_0 se obtiene una singularidad cuando $\omega_0 = \omega$ (resonancia). Se acostumbra definir el ancho de la línea de resonancia como el ancho de la curva (en valores de H) correspondiente a la mitad del valor máximo de absorción. Designando por ΔH este valor, el mismo se relaciona con el tiempo de relajación /4/ (y con las pérdidas de energía en la ecuación (4) de acuerdo a:

$$\tau = \frac{2}{\gamma \Delta H} \quad (5)$$

3. INSTRUMENTACIÓN

Existen diversos métodos para la determinación experimental de ΔH . En este caso se utilizó el recomendado por la norma de la Comisión Internacional de Electrotécnica en su publicación 556 de 1982 /5/. El método se basa en el establecimiento de una onda TEM en el interior de una cavidad resonante construida de forma tal que el campo magnético transversal tiene una intensidad alta en la región próxima al conductor central, alcanzando su valor máximo en el centro geométrico de la misma. Es precisamente en este punto donde se coloca la muestra a medir, de tal manera que sobre ella quedan aplicados de forma simultánea el campo magnético constante y la señal de radiofrecuencia, con su componente del vector magnético normal a la dirección del campo constante.

El sistema de medición está compuesto por un generador de radiofrecuencia, una cavidad resonante que se coloca entre los polos de un electroimán y un sistema de detección (Figura 1).

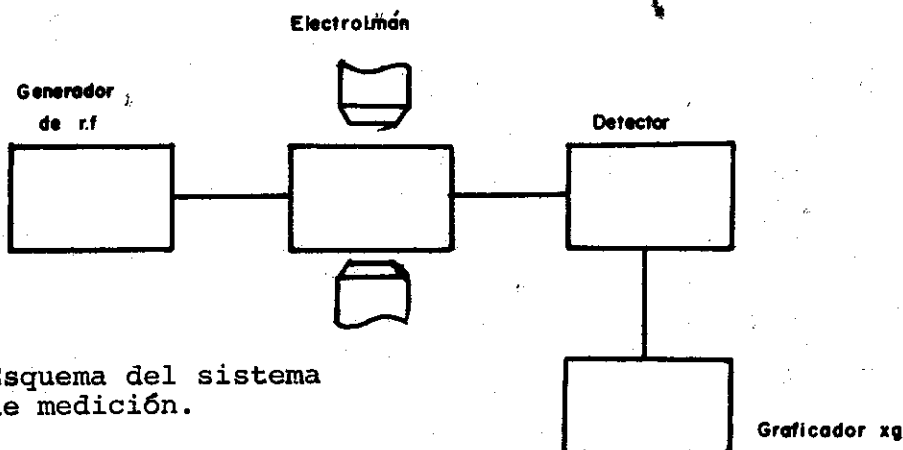
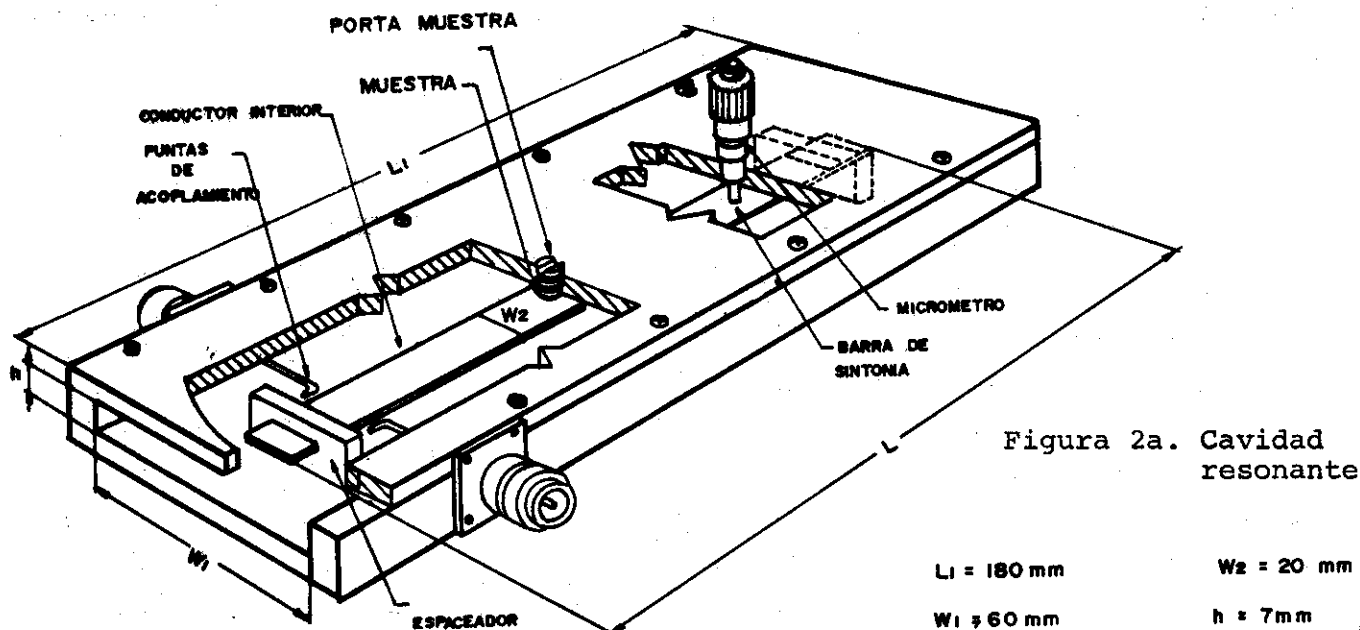
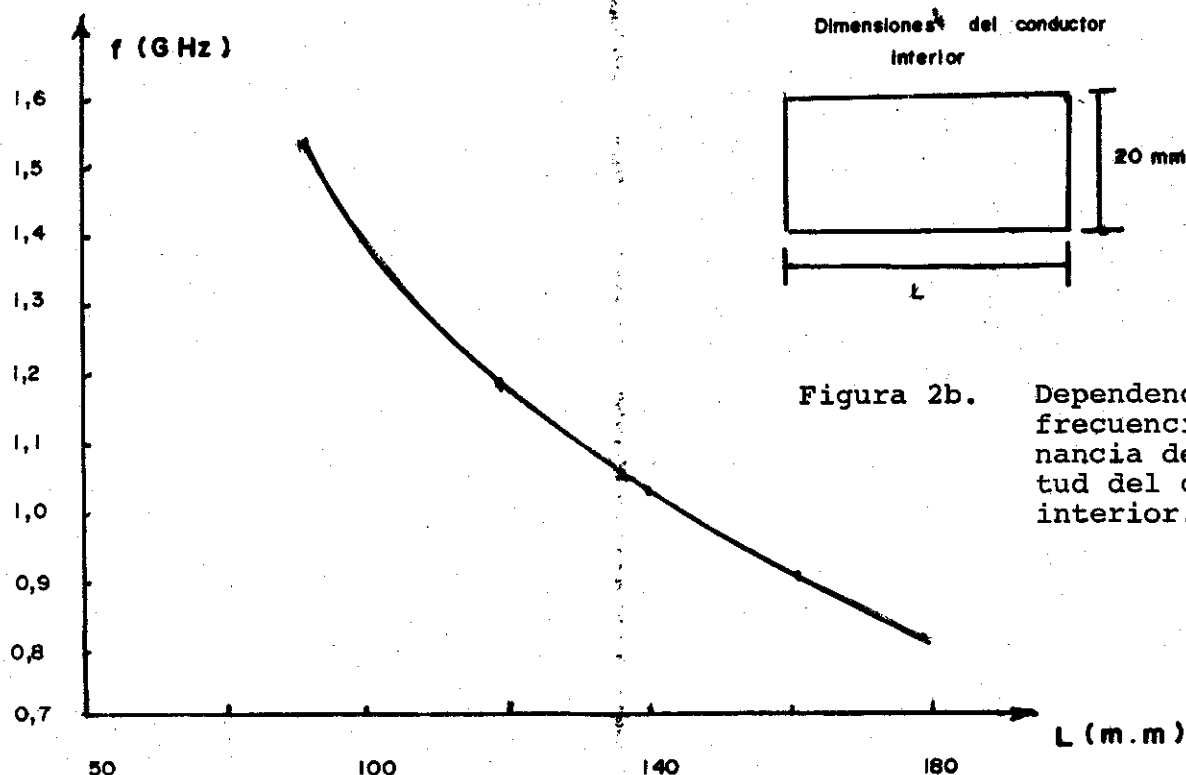


Figura 1. Esquema del sistema de medición.

Para energizar el electroimán se utilizó una fuente estabilizada Philips, Mod. Pe 1520. El mismo posee polos de 99 mm de diámetro y proporciona un campo máximo H de 4.56 kOe para una corriente de 6A cuando la distancia entre polos es de 40 mm. Los valores del campo magnético generado por el electroimán se determinaron utilizando un gaussímetro Redcliffe tipo 102-D, de apreciación 0.1 Gauss. Se midió H en función de la intensidad de la corriente aplicada al enrollado para diferentes posiciones paralelas a la superficie de los polos (r) y para diferentes separaciones de los mismos. El ancho de la zona entre los polos paralela a las caras donde el campo es uniforme es también de 40 mm.

La cavidad resonante, construida de latón con recubrimiento de plata y abierta en los extremos, aparece en la Figura 2a. El campo magnético se debe mantener lo más constante y uniforme posible dentro de la cavidad, lo que requiere un cuidadoso diseño del sistema de medición. La frecuencia de resonancia está determinada por la longitud del elemento central. En la Figura 2b aparece la dependencia frecuencia de resonancia vs longitud obtenida experimentalmente. El detector utilizado es un analizador de espectros marca Anritsu, Mod. Ms-62C.





Para llevar a cabo la medición a una frecuencia determinada se establece un nivel determinado de potencia a la entrada de la cavidad, con el auxilio de atenuadores, y se mide el nivel de salida de la misma con el detector acoplado, anotándose este valor (a_0). El tornillo con la muestra acoplada se introduce en el orificio central de la cavidad (ver Figura 2), procurando que la muestra quede lo más próxima posible al conductor central pero sin tocarlo. Este procedimiento no debe alterar el valor de a_0 .

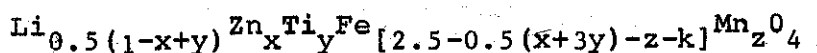
Seguidamente se varía el campo magnético H hasta que ocurre la máxima absorción a_r y se determina el valor medio de la potencia consumida $a_{(\frac{1}{2})}$. Una vez establecido este valor, se varía el campo magnético H por debajo y por encima del valor de resonancia H_r , anotando los valores H_1 y H_2 del mismo en que se alcanza el nivel de salida $a_{(\frac{1}{2})}$. El ancho de la línea de resonancia viene dado entonces por:

$$\Delta H = |H_2 - H_1| \quad (6)$$

En nuestro caso, las mediciones se llevaron a cabo a 812 Mhz. El sistema utilizado también permite llevar a cabo el registro automático de las curvas, a costa de una disminución de la precisión de los resultados.

4. PREPARACIÓN DE LAS MUESTRAS

Muestras de ferrita de composición general

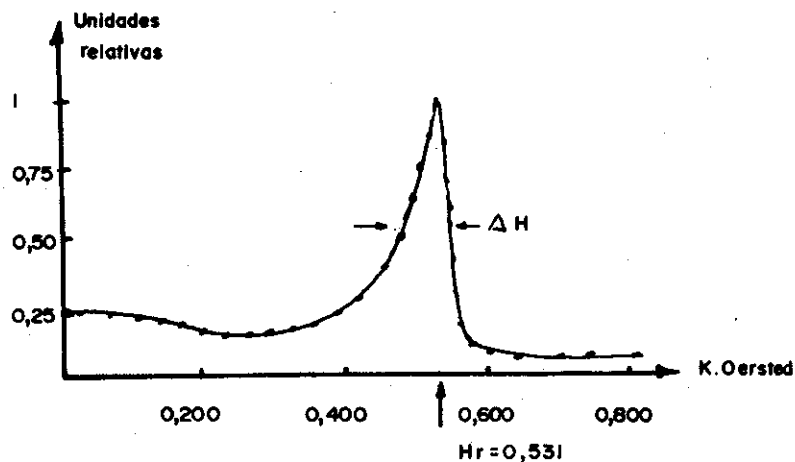


con $x = 0.2$, $y = 1.05$, $z = 0.05$ y k variando entre 0 y 0.05 se prepararon por el método cerámico convencional, adicionando pequeñas cantidades de Bi_2O_3 con el fin de favorecer la sinterizabilidad /6/. Los polvos se mez-

claron y molieron durante 1 hora por vía húmeda en etanol, fueron precocidos a 850 °C, compactados en forma de tabletas de 6 mm de diámetro y sinterizados al aire a la temperatura máxima de 1050 °C, durante 3 horas.

Las muestras a medir se desbastaron hasta alcanzar la forma de pequeños cilindros con un diámetro (D) de aproximadamente 3 mm y un espesor (d) tal que $d/D < 0.05$, de acuerdo a lo recomendado en la literatura. Cada disco se fija posteriormente en el extremo de un tornillo de material no magnético (nylon de alta densidad).

Figura 3. Curva de resonancia ferromagnética para una ferrita de LiZnMnTi .



5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con el fin de verificar la reproducibilidad de los resultados y la validez del método, se realizaron grupos de diez determinaciones de ΔH en varias muestras diferentes. En cada caso se midieron las corrientes en el enrollado del electroimán I_1 , I_2 e I_r que corresponden a los niveles de potencia descritos en la sección 3, determinándose los valores H_1 y H_2 . En la Figura 3 aparece la curva de resonancia obtenida para una de las muestras, donde es posible observar el campo de resonancia H_0 y el ancho de línea ΔH . La absorción de energía está medida en unidades arbitrarias. En la Tabla 1 se muestra uno de los juegos de valores obtenidos.

Tabla I

	I_1 (mA)	I_2 (mA)	H_1 (kOe)	H_2 (kOe)	ΔH (Oe)	I_r (mA)	H_r (kOe)
1	585	670	0.480	0.546	65,6	650	0,530
2	582	669	0.478	0.545	67.1	646	0.527
3	582	668	0.478	0.544	66.3	643	0.525
4	577	669	0.474	0.545	70.9	646	0.527
5	577	668	0.474	0.544	70.1	643	0.525
6	577	666	0.474	0.543	68.6	641	0.523
7	579	667	0.475	0.543	67.9	640	0.522
8	579	666	0.475	0.543	67.1	641	0.523
9	576	667	0.473	0.543	70.2	640	0.523
10	583	666	0.479	0.543	64.0	642	0.524

El valor medio de ΔH y la desviación standard σ obtenidos para tres muestras diferentes, del mismo lote de polvos (igual composición y tratamiento), aparecen en la Tabla II.

Tomando $\sigma/\sqrt{10}$ como una medida del error absoluto, se obtiene una contribución del error accidental al error total de entre 0.7 (muestra 4.2) y 1.7 % (muestra 43), lo que representa un valor adecuado para mediciones magnéticas. El valor promedio de las tres muestras es $\Delta H = 68.6$ Oe. En la Tabla II también se muestran los promedios para el campo de resonancia H_r que proporciona una media general de 0.527 kOe.

Tabla II

Muestra	ΔH (medio) (Oe)	σ (Oe)	H_r (kOe)
M-130790-41	68.9	3.76	0.517
M-130790-42	69.2	1.70	0.538
M-130790-43	67.8	2.09	0.525

RECONOCIMIENTOS

Agradecemos el apoyo brindado por el Lic. Francisco Calderón Piñar y el Ing. Roberto Pedroso para la realización de este trabajo, así como la colaboración del Lic. Sergio Díaz.

REFERENCIAS

1. Bloembergen, Nicolas (1956). *Magnetic Resonance in Ferrites*. Proceedings of the IRE, Vol. 10, 10.
2. Vrehan, Q.H.F. (1969). *Absorption and Dissipation in Porous and Anisotropic Polycrystalline Ferrites at Microwave Frequency*. J. of Appl. Physics, Vol. 40, 4. March.
3. Nicolas, J. (1980). *Microwave Ferrites*. North Holland Pub. Co.
4. Lax, B. and K.J. Button (1962). *Microwave Ferrites and Ferrimagnetics*. McGraw-Hill Book Co. Inc.
5. Norma de la Comisión Internacional Electrónica (1982). Publicación 556.
6. Sun, Minche and Yu-chen, Shu (1980). *A Study of Narrow Linewidth Li Ferrites*. IEEE Trans. on Magnetics; Vol. Mag. 16, 5, september.