

# ESTUDIO DEL ÁTOMO $H\pi$ BAJO PERTURBACIONES

## STUDY OF $H\pi$ ATOM THROUGH PERTURBATIONS

A. DELGADO SOLANO<sup>a†</sup>, J. A. MENDOZA SUÁREZ<sup>a</sup>

Departamento de Física y Geología, Universidad de Pamplona Colombia, akkar2230@gmail.com<sup>†</sup>

<sup>†</sup> autor para la correspondencia

Recibido 15/10/2017; Aceptado 30/10/2017

A continuación se realiza el estudio del átomo hidrógeno piónico  $H\pi$ , mediante una teoría local efectiva, la cual podría generalizar los estados ligados hadrónicos, permitiendo la superposición de los potenciales fuertes y electromagnéticos [1]. Se desarrolla el estado ligado  $H\pi$ , con interacciones fuertes como perturbaciones a un sistema electromagnético, a bajas energías (teoría efectiva local). Primero se deducen las ecuaciones del cambio en los niveles de energía y la tasa de decaimiento del sistema, siempre en el estado base de interacción  $s$ . A través de la condición de equivalencia dichas expresiones están dadas en términos de las longitudes de dispersión de ondas  $s$ . El principal objetivo es encontrar una solución al sistema de manera simultánea y obtener una región convergente de valores para las longitudes de dispersión de ondas  $s$ .

In this work the study of the propionic hydrogen atom  $H\pi$  is performed through effective local theory, which might generalize hadronic bound states, allowing overlapping and strong electromagnetic potentials [1]. It develops the bounded state  $H\pi$ , with strong interactions as perturbations to an electromagnetic system, at low energies (local effective theory). First we deduce the equations of the change in energy levels and the decay rate of the system, always in the base state of interaction  $s$ ; Through of the equivalence condition these expressions are given in terms of the wave scattering lengths  $s$ . The main objective is to find a solution to the system simultaneously and obtain a convergent region of values for the wavelength dispersions of  $s$ .

PACS: Hadronic atoms, 36.10.-k; scattering, 13.85.Dz; scattering length s-waves, 11.80.Et; low energy, 11.80.Et

### I. INTRODUCCIÓN

El átomo  $H\pi$ , similar al átomo de hidrógeno, es un estado ligado creado principalmente por las interacciones electromagnéticas. La diferencia está en la estructura interna del pión, la cual genera una perturbación al potencial del sistema debido a las interacciones fuertes que se presentan entre los quarks del protón y el pión. Ya que el radio de Bohr en el estado base de energía para el átomo  $H\pi$  es mayor que el radio de interacciones fuertes (para el átomo  $H\pi$  el radio en el estado base es aproximadamente  $220fm$ , mientras el límite máximo para las interacciones fuertes esta alrededor de los  $10fm$  [1]) esta perturbación es más significativa en el estado base, mientras que se hace menos evidente para niveles de energía superiores. Por esta razón, el estudio de este cambio en el espectro de energía puede ser tratado mediante la teoría de perturbaciones a bajas energías, lo que hace todo el tratamiento una teoría efectiva local.

La importancia de este tema se debe principalmente al desarrollo de una teoría que aunque efectiva local, busca generalizar las interacciones entre hadrones a bajas energías. Además, en este tipo de estados ligados se acoplan tanto interacciones fuertes como electromagnéticas, lo cual podría arrojar nuevas referencias para tratar el problema de gran unificación.

### II. ÁTOMO HIDRÓGENO PIÓNICO

El átomo  $H\pi$  es un estado ligado formado por un protón  $p$  y un pión  $\pi^-$ . La función de onda en el estado base para este

átomo esta dada por [2]:

$$|H\pi(\mathbf{P})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_{\pi^-} d^3k_p \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p)}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})} \sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \times \sqrt{2E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) |\pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p)\rangle. \quad (1)$$

Aquí  $E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)$  es la energía total del átomo  $H\pi$  en el estado base definida como:

$$E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p) = \sqrt{M^2 + |\mathbf{P}|^2}; \quad (2)$$

donde  $\mathbf{P}$  el momento de estado  $H\pi$ , y  $M = m_p + m_{\pi^-}$  su masa;  $\Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})$  la función de onda del pión ligado al protón en su estado base, en el espacio de momento. La cual esta normalizada por:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})|^2 = 1. \quad (3)$$

El ket  $|\pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p)\rangle$  es el vector estado de la interacción pión-protón definido por [3]:

$$|\pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p)\rangle = a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-}) a_p^\dagger(\mathbf{k}_p) |0\rangle; \quad (4)$$

con  $a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})$  y  $a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)$  los operadores creación para el protón y del pión a partir del estado vacío. Para estos operadores están definidas las reglas de conmutación y anticonmutación [4].

### III. PARÁMETROS DEL ÁTOMO $H\pi$

La interferencia entre los potenciales de interacciones electromagnéticas y fuertes, causan un cambio en los niveles

de energía para el estado ligado  $p + \pi^-$ , en comparación al átomo de hidrógeno. Ya que el  $\pi^-$  más masivo que el electrón, se ve atraído por el protón, cayendo a través de los orbitales energéticos hasta que es frenado bruscamente debido a las interacciones fuertes. Este repentino frenado se ve reflejado en una emisión de rayos X. Esta interacción produce un corrimiento  $\epsilon$  en el nivel energético, ver figura 1), el cual es más evidente en el estado base de energía [5].

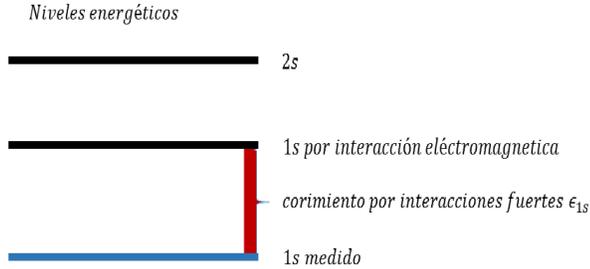


Figura 1. Corrimiento del nivel energético debido a interacciones fuertes.

Por otro lado, las interacciones fuertes, hacen que el estado ligado sea inestable, luego existen la tasa de decaimiento y su respectiva vida media. La relación entre estos dos parámetros y la matriz de interacción esta dada por [2] [6]:

$$\lim_{TV \rightarrow \infty} \frac{\langle H\pi(\mathbf{P}) | \mathbb{T} | H\pi(\mathbf{P}) \rangle}{2E_0(\mathbf{P})TV} \Big|_{\mathbf{P}=0} = -\epsilon_{1s} + i \frac{\Gamma_{1s}}{2}. \quad (5)$$

En teoría de perturbaciones la unitariedad de la matriz de interacción es importante, ya que permite realizar la siguiente descomposición [4]:

$$S = 1 + i\mathbb{T}; \quad (6)$$

donde  $\mathbb{T}$  es la perturbación al sistema. Ya que esta perturbación esta dada por interacciones fuertes, se relaciona con la energía de interacciones fuertes  $\mathbb{T} = F(\mathcal{Q}_{st})$ , donde  $\mathcal{Q}_{st}$  es la densidad lagrangiana de la interacción.

Si aplicamos la serie de Dyson [7], considerando solo dos ordenes en la expansión se aprecia que la perturbación está dada por:

$$\mathbb{T} = - \int d^4x_1 \mathcal{Q}_i(x_1) + \frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\mathcal{Q}_i(x_1) \mathcal{Q}_i(x_2)]. \quad (7)$$

El valor esperado de la perturbación para el átomo  $H\pi^-$  es:

$$\begin{aligned} \langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathbb{T} | H\pi(\mathbf{P}) \rangle &= -\langle H\pi(\mathbf{P}') | \int d^4x_1 \mathcal{Q}_1(x_1) | H\pi(\mathbf{P}) \rangle + \\ &\frac{i}{2} \langle H\pi(\mathbf{P}') | \int d^4x_1 d^4x_2 T[\mathcal{Q}_1(x_1) \mathcal{Q}_2(x_2)] | H\pi(\mathbf{P}) \rangle. \end{aligned}$$

Debido a la naturaleza de la matriz de transición en el proceso de perturbación se tiene:

$$\begin{aligned} \langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathbb{T} | H\pi(\mathbf{P}) \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{P} - \mathbf{P}') [-\langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathcal{Q}(0) | H\pi(\mathbf{P}) \rangle \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}') | T[\mathcal{Q}(x) \mathcal{Q}(0)] | H\pi(\mathbf{P}) \rangle]. \quad (8) \end{aligned}$$

El término  $(2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{P} - \mathbf{P}')$  está definido como el cuadvolumen  $TV$  para  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  [6], luego:

$$\begin{aligned} \frac{\langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathbb{T} | H\pi(\mathbf{P}) \rangle}{TV} &= -\langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathcal{Q}(0) | H\pi(\mathbf{P}) \rangle \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}') | T[\mathcal{Q}(x) \mathcal{Q}(0)] | H\pi(\mathbf{P}) \rangle \quad (9) \end{aligned}$$

Ya que el espacio para el sistema no es limitado  $TV \rightarrow \infty$ , y:

$$\begin{aligned} \lim_{TV \rightarrow \infty} \frac{\langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathbb{T} | H\pi(\mathbf{P}) \rangle}{TV} &= -\langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathcal{Q}(0) | H\pi(\mathbf{P}) \rangle \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}') | T[\mathcal{Q}(x) \mathcal{Q}(0)] | H\pi(\mathbf{P}) \rangle. \quad (10) \end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones (5) y (10) se tiene que:

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \langle H\pi(\mathbf{P}) | \mathcal{Q}(0) | H\pi(\mathbf{P}) \rangle \quad (11)$$

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \int_0^\infty d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}) | T[\mathcal{Q}(x) \mathcal{Q}(0)] | H\pi(\mathbf{P}) \rangle. \quad (12)$$

Se ha tomado la representación de  $\epsilon_{1s}^1$  como el término de primera aproximación para el corrimiento.

#### IV. CÁLCULO DE $\epsilon_{1s}^1$

Para desarrollar el cálculo, se retoma función de onda en el estado base del átomo  $H\pi$  ecuación (1):

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^1 &= -\frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \left[ \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \right. \\ &\times \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \times \sqrt{2E_0(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p)} \\ &\times \sqrt{2E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)} \delta^3(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}'_p) \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p) \\ &\left. \times \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(\mathbf{k}'_p) | \mathcal{Q}(0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p) \rangle \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

El factor del valor esperado de  $\mathcal{Q}(0)$  es la amplitud del proceso. Para solucionar las integrales con respecto a  $\mathbf{k}_p$  y  $\mathbf{k}'_p$ , se aplica  $\delta(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p) = \delta(\mathbf{k}_p - (\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-}))$  [8]. Se cumple así el principio de conservación de la cantidad de movimiento;  $\mathbf{P} = \mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p$ , luego  $\mathbf{k}_p = \mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-}$ ; entonces:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^1 &= -\frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \left[ \frac{T}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3k'_{\pi^-} \sqrt{2E_0(\mathbf{P}')}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \right. \\ &\times \left. \frac{d^3k_{\pi^-} \sqrt{2E_0(\mathbf{P})}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{\Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})}{\sqrt{2E_p(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-})} \sqrt{2E_p(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-})}} \right]; \quad (14) \end{aligned}$$

donde  $T$  es la amplitud. Considerando que la interacción es vista desde el marco de referencia del centro de masa, entonces el estado ligado  $H\pi$  está en reposo, luego  $\mathbf{P} = \mathbf{P}' = 0$ ,

lo que implica que  $\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p = 0$  y  $|\mathbf{k}_{\pi^-}| = |\mathbf{k}_p|$ . Además considerando los conmutadores para los momentos [9],  $\mathbf{k}'_{\pi^-} = \mathbf{k}_{\pi^-} \equiv \mathbf{k}$ ; luego:

$$\epsilon_{1s}^1 = -T \left( \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}) 2E_p(\mathbf{k})}} \right)^2 \quad (15)$$

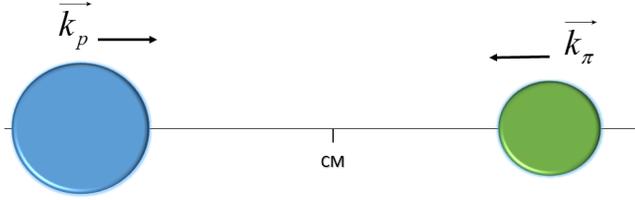


Figura 2. Interacción  $p + \pi^-$  vista desde el marco de referencia de centro de masa del sistema.

En este caso consideramos el proceso  $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$ . La amplitud  $T$  para este proceso se obtiene por simetría de Isospin [10]. Ya que esta interacción se ha considerado con interacciones fuertes de baja energía, se puede aplicar la condición de equivalencia, en términos de las longitudes de dispersión de ondas  $s$  [1]:

$$T = \frac{8\pi}{3} (m_{\pi^-} + m_p) (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}); \quad (16)$$

luego:

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{1}{3\pi^2} (m_{\pi^-} + m_p) (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left( \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}) 2E_p(\mathbf{k})}} \right)^2. \quad (17)$$

En el límite de bajas energías, la masa del protón se hace muy grande en comparación con el momento  $m_p \gg k$ :

$$\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}) 2E_p(\mathbf{k})} = 2 \sqrt{m_p} (m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}. \quad (18)$$

Obteniéndose:

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left( \frac{\sqrt{m_{\pi^-}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2. \quad (19)$$

Donde se ha introducido la masa reducida del sistema  $H\pi$ . Para resolver esta última integral es necesario considerar la función de onda en el espacio de momento  $\Phi_0(\mathbf{k})$ , la cual está dada por [2]:

$$\Phi_0(\mathbf{k}) = \sqrt{4\pi} \int_0^\infty j_0(kr) R_0(r) r^2 dr, \quad (20)$$

aquí  $j_l(kr)$  son las funciones esféricas de Bessel y  $R_0(r)$  la función de onda radial para el átomo de hidrógeno. Tomando  $d^3k = d\Omega k^2 dk$ , y ya que el resto de la función es independiente de las coordenadas angulares, la integral de ángulo sólido es

$4\pi; \epsilon_{1s}^1$  puede ser escrito:

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left( \frac{4\pi \sqrt{4\pi} \sqrt{m_{\pi^-}}}{(2\pi)^3} \times \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dk dr j_0(kr) R_0(r) r^2 k^2}{(m_{\pi^-}^2 + k^2)^{1/4}} \right)^2. \quad (21)$$

Introduciendo la función de onda para el átomo de hidrógeno en el estado base para  $r = 0$  y las funciones de Bessel [8]:

$$j_l(x) = (-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left( \frac{\sin x}{x} \right). \quad (22)$$

Sustituyendo en  $\epsilon_{1s}^1$  se tiene:

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left( \frac{2\sqrt{m_{\pi^-}}}{\pi} \Psi_{1s}(0) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r}{a}\right) r dr \times \int_0^\infty \frac{\sin(kr)k}{(m_{\pi^-}^2 + k^2)^{1/4}} dk \right)^2. \quad (23)$$

La solución de esta integral es compleja; para solucionarla se deben aplicar algunas propiedades de las funciones de Bessel. Primero recordando que  $k \sin(kr) = -\frac{d}{dr} [\cos(kr)]:$

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left( -\frac{2\sqrt{m_{\pi^-}}}{\pi} \Psi_{1s}(0) \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r}{a}\right) r dr \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{\cos(kr)}{(m_{\pi^-}^2 + k^2)^{1/4}} dk \right)^2.$$

Usando la fórmula [11]:

$$K_\nu(xz) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})(2z)^\nu}{\sqrt{\pi} x^\nu} \int_0^\infty \frac{\cos(xt) dt}{(t^2 + z^2)^{\nu+1/2}}; \quad (24)$$

donde  $K_\nu$  son las funciones de Bessel modificadas de segunda especie y  $\Gamma$  la función gamma. Fácilmente se puede apreciar que  $r = x, t = k$  y  $z = m_{\pi^-}$ , con  $\nu = -1/4$ , entonces:

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left( -\frac{2^{5/4} m_{\pi^-}^{3/4} \Psi_{1s}(0)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r}{a}\right) r dr \frac{d}{dr} [K_{1/4}(m_{\pi^-} r) r^{-1/4}] \right)^2.$$

Ahora haciendo un cambio de variable;

$$z = m_{\pi^-} r \rightarrow r = \frac{z}{m_{\pi^-}} \rightarrow r^{-1/4} = z^{-1/4} m_{\pi^-}^{1/4};$$

$$dr = \frac{dz}{m_{\pi^-}} \rightarrow \frac{d}{dr} = m_{\pi^-} \frac{d}{dz};$$

y tomando la relación [11]:

$$\frac{1}{z^k} \frac{d^k}{dz^k} [z^{-\nu} K_\nu(z)] = (-1)^k z^{-\nu-k} K_{\nu+k}(z); \quad (25)$$

se tiene:

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{2\pi}{3\mu}(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left( \frac{2^{5/4} \Psi_{1s}(0)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \right) \times \int_0^\infty z^{3/4} \exp((-z/m_{\pi^-} a)) K_{\frac{5}{4}}(z) dz \quad (26)$$

Para resolver esta integral se considera la serie de Taylor para  $\exp(-z/m_{\pi^-} a)$  e introduciendo el radio de Bohr para el átomo  $H\pi$ :

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{2\pi}{3\mu}(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left( \frac{2^{5/4} \Psi_{1s}(0)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \right) \times \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{\mu\alpha}{m_{\pi^-}} \right)^n \int_0^\infty z^{3/4+n} K_{\frac{5}{4}}(z) dz \quad (27)$$

Aplicando la fórmula [11]:

$$\int_0^\infty x^\mu K_\nu(x) dx = 2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right);$$

con  $\mu = \frac{3}{4} + n$  y  $\nu = \frac{5}{4}$ ; entonces:

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{2\pi}{3\mu}(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \right) \times \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} 2^{n+1} \left( \frac{\mu\alpha}{m_{\pi^-}} \right)^n \Gamma\left(\frac{3+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+n}{2}\right) \quad (28)$$

Ahora se define:

$$O(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} 2^{n+1} \left( \frac{\mu\alpha}{m_{\pi^-}} \right)^n \Gamma\left(\frac{3+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+n}{2}\right); \quad (29)$$

entonces  $\epsilon_{1s}$  puede ser escrito como:

$$\epsilon_{1s}^1 = -\frac{2\pi}{3\mu}(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2 (O(n))^2; \quad (30)$$

donde  $O(n)$  son términos de correcciones de orden  $n$  realizadas a  $\epsilon_{1s}^1$ , con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

## V. CÁLCULO DE $\Gamma_{1s}$

Se retoma la ecuación (12), considerando el producto cronológico de Dyson, y la función de onda del  $H\pi$  en el marco de referencia del centro de masa:

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{(2\pi)^6} \left[ \int_{-\infty}^\infty d^4x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p) \right. \\ \times \delta^3(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(\mathbf{k}'_p) | \mathcal{L}(0) \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p) \rangle \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) + \int_{-\infty}^\infty d^4x \Theta(x^0) \int \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \\ \left. \times \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p) \delta^3(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p) \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(\mathbf{k}'_p) | \mathcal{L}(x^0) \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p) \rangle \right]$$

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[ \int_{-\infty}^\infty d^4x \Theta(-x^0) \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^\infty d^4x \Theta(x^0) \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right].$$

Ya que se está trabajando sobre un decaimiento, con el fin de no perder información es necesario considerar todos los estados posibles después del proceso. En este caso se considera el canal  $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ . Los estados para cada partícula sin considerar spin están normalizados y además forman una base completa ortogonal, luego se pueden introducir a la ecuación sin alterarla de la siguiente forma [4]:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{(2\pi)^3 2E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{(2\pi)^3 2E_p(\mathbf{Q}_p)} \times |\pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)\rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)| + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{(2\pi)^3 2E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{(2\pi)^3 2E_n(\mathbf{Q}_n)} |\pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|; \\
\Gamma_{1s} &= \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^6} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{Q}(0)|\pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)\rangle \right. \\
&\quad \times \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)|\mathcal{Q}(x^0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{Q}(x^0)|\pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)\rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)| \\
&\quad \times \mathcal{Q}(0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{Q}(0)|\pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|\mathcal{Q}(x^0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{Q}(x^0)|\pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|\mathcal{Q}(0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle \right].
\end{aligned}$$

Ya que  $\Gamma_{1s}$  esta relacionada con un proceso de decaimiento, los estados elásticos están prohibidos [8], entonces no aportan para este cálculo. Solo los procesos de decaimiento se consideran. A los términos de procesos elásticos se les define como el corrimiento en el nivel energético de segunda aproximación  $\epsilon_{1s}^2$ , ya que provienen del factor de segundo orden en la serie de Dyson. Luego:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} &= \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^6} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{Q}(0)|\pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n) \right. \\
&\quad \times n(\mathbf{Q}_n)|\mathcal{Q}(x^0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{Q}(x^0)|\pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n) \\
&\quad \left. \times |\mathcal{Q}(0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle \right]. \tag{31}
\end{aligned}$$

Mientras que:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s}^2 &= \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^6} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \\
&\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \right. \\
&\quad \times \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{Q}(0)|\pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)\rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)| \\
&\quad \times \mathcal{Q}(x^0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \\
&\quad \times \frac{d^3 Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{Q}(x^0)|\pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)\rangle \\
&\quad \left. \times \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)|\mathcal{Q}(0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle \right] \tag{32}
\end{aligned}$$

coordenadas espaciales y temporales, resolviendo las integrales de momento se tiene:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} &= \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \right. \\
&\quad \times \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{Q}(0)|\pi^0 \\
&\quad \times \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|\mathcal{Q}(x^0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k}) \\
&\quad \left. \times |\mathcal{Q}(x^0)|\pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|\mathcal{Q}(0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle \right].
\end{aligned}$$

Continuando con el cálculo de  $\Gamma_{1s}$  y separando las Utilizando la relación entre las funciones delta y escalón para

mesones [4]:

$$\Theta(\pm x^0) = 2\pi\delta(E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0}) + E_n(\mathbf{Q}_n) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(\mathbf{k}))\delta(x^0).$$

Integrando en el límite de bajas energías  $k \rightarrow 0$  con respecto a las masas de las partículas, luego:

$$\Gamma_{1s} = \frac{(T_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n})^2}{8(2\pi)} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \times \left[ \int \frac{dQ Q^2 \delta[E_{\pi^0}(\mathbf{Q}) + E_n(\mathbf{Q}) - m_{\pi^-} - m_p]}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q})E_n(-\mathbf{Q})} \right]. \quad (33)$$

Realizando un cambio de variable en la integral así:

$$\frac{dE}{E} = \frac{QdQ}{\sqrt{m_{\pi^0}^2 + Q^2} \sqrt{m_n^2 + Q^2}}; \quad (34)$$

Se tiene:

$$\Gamma_{1s} = \frac{(T_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n})^2 Q}{8(2\pi)(m_{\pi^-} + m_p)} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2;$$

Sustituyendo la amplitud por simetría de Isospín [10], junto con la condición de equivalencia y la masa reducida del sistema se llega a:

$$\Gamma_{1s} = \frac{8\pi Q}{9\mu} \left[ T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}} \right]^2 \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k}) \sqrt{m_{\pi^-} m_p}}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2,$$

utilizando la relación (18):

$$\Gamma_{1s} = \frac{8\pi Q}{9\mu} \left[ T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}} \right]^2 \left( \frac{\sqrt{m_{\pi^-}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2.$$

Esta última integral es la misma de la ecuación (19), la cual se resolvió para calcular  $\epsilon_{1s}$ . Utilizando este resultado y en términos de las longitudes de dispersión para ondas s:

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9} \pi \frac{Q}{\mu} \left[ a_0^{\frac{3}{2}} - a_0^{\frac{1}{2}} \right]^2 [\Psi_{1s}(0)]^2 (O(n))^2. \quad (35)$$

## VI. CÁLCULO DE $\epsilon_{1s}^2$

Retomando la ecuación (32) y procediendo como el calculó anterior, pero usando la relación entre la función escalón y la función  $\delta$ ; que en este caso está dada por [4]:

$$\Theta(\pm x) = \frac{\delta(x)}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) + E_p(\mathbf{Q}_p) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(-\mathbf{k})}; \quad (36)$$

Resolviendo las integrales se tiene:

$$\epsilon_{1s}^2 = \frac{(T_{\pi^- p \rightarrow \pi^- p})^2}{16(2\pi)^3} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \times \left[ \int \frac{d^3Q}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q})E_p(-\mathbf{Q})[E_{\pi^-}(\mathbf{Q}) + E_p(-\mathbf{Q}) - E_0]} \right]. \quad (37)$$

<sup>1</sup>La elección del valor de  $\alpha\mu$ , como el acotamiento del momento que rompe la indeterminación en la integral, se debe a que el potencial electromagnético es de la forma  $\frac{1}{r}$ , y ya que se toma el estado base de energía, entonces  $r = \frac{1}{\alpha\mu}$ , este es el radio de Bohr para el hidrógeno piónico.

Donde  $E_0 = E_{\pi^-}(\mathbf{k}) + E_p(-\mathbf{k})$ . En este caso la amplitud es la misma que para  $\epsilon_{1s}$  en primera aproximación, ya que el proceso es el mismo, entonces sustituyendo (9) y realizando la integral angular en coordenadas esféricas, ya considerando bajas energías se tiene:

$$\epsilon_{1s}^2 = 2(m_{\pi^-} + m_p)^2 (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \times \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \times \left[ \int \frac{dQ Q^2}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q})E_p(-\mathbf{Q})[E_{\pi^-}(\mathbf{Q}) + E_p(-\mathbf{Q}) - M]} \right]. \quad (38)$$

Con  $M = m_{\pi^-} - m_p$ . Esta última integral es logarítmicamente divergente, un problema que no se había presentado antes. Para solucionarlo se aplica la condición a bajas energías y las teorías efectivas locales. En el caso del átomo  $H\pi$  el momento generalizado de las partículas no puede exceder el valor de  $Q = \alpha\mu$  [9]. De esta manera, el desarrollo y la teoría solo son validas para este intervalo de energías, lo que la hace una teoría efectiva local. Ya que  $\alpha\mu = 0.887$  MeV [12], si lo comparamos con las masas de las partículas involucradas  $m_{\pi^-} = 139.57$  MeV y  $m_p = 938.272$  MeV; se puede apreciar que el máximo valor de  $Q$  es muy pequeño comparado con las masas. Según esto es posible realizar una expansión de las energías de la siguiente forma<sup>1</sup>:

$$\sqrt{m_{\pi^-}^2 + Q^2} = m_{\pi^-} + \frac{Q^2}{2m_{\pi^-}}, \quad (39)$$

$$\sqrt{m_p^2 + Q^2} = m_p + \frac{Q^2}{2m_p}; \quad (40)$$

entonces:

$$\epsilon_{1s}^2 = 2(m_{\pi^-} + m_p)^2 (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \times \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[ \int_0^{\alpha\mu} \frac{dQ Q^2}{(m_{\pi^-} + \frac{Q^2}{2m_{\pi^-}})(m_p + \frac{Q^2}{2m_p})} \right] \times \frac{1}{m_{\pi^-} + \frac{Q^2}{2m_{\pi^-}} + m_p + \frac{Q^2}{2m_p} - m_{\pi^-} - m_p}. \quad (41)$$

Resolviendo la integral para  $Q$ :

$$\epsilon_{1s}^2 = 4\alpha m_{\pi^-} m_p (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \times \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2. \quad (42)$$

De forma análoga la última integral la podemos llevar a la forma de (19) usando la relación (18):

$$\epsilon_{1s}^2 = 4\alpha (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \left( \frac{\sqrt{m_{\pi^-}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2.$$

Luego en términos de  $a_0^{1/2}$  y  $a_0^{3/2}$ :

$$\epsilon_{1s}^2 = 4\alpha (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2})^2 [\Psi_{1s}(0)]^2 (O(n))^2. \quad (43)$$

## VII. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las ecuaciones (30,35,43), proporcionan una expresión para calcular directamente el valor numérico del cambio y ancho de los niveles de energía en el estado base del átomo  $H\pi$ . Sin embargo, dicho cálculo está condicionado a los valores de las longitudes de dispersión de ondas  $s$ . Estas relaciones forman un conjunto de ecuaciones, el cual puede ser solucionado, tomando como referencia los valores experimentales para  $\epsilon_{1s}$  y  $\Gamma_{1s}$ . Los valores experimentales medidos para estos observables han sido publicados por el grupo *Pionic Hydrogen Collaboration* en *The Paul Scherrer Institute* (PSI), un centro de investigaciones altamente avanzado de última tecnología, ubicado en Suiza. Los resultados son [9] [13]:

$$\epsilon_{1s} = -7.120 \pm 0.011 \text{ eV}; \quad \Gamma_{1s} = 0.823 \pm 0.019 \text{ eV}. \quad (44)$$

Primero es fundamental realizar un análisis a la serie  $O(n)$  dada por (29), ya que cualquier termino que se desee analizar tiene dependencia directa de este factor. El cálculo desarrollado para cada valor respectivo de  $n$  para  $O(n)$  desde  $n = 0$  hasta  $n = 10$  arrojó el resultado mostrado en la tabla (1). Al apreciar estos resultados se puede concluir que a medida que los  $n_i$  aumentan el valor de  $O(n_i)$  tiende a cero. Esto quiere decir que es una serie convergente, y no hay necesidad de truncamiento.

Tabla 1. Valores de  $O(n)$

$n$	$O(n)$
0	1
1	-0.00484664
2	0.0000302808
3	$-1.9568 \times 10^{-7}$
4	$1.27351 \times 10^{-9}$
5	$-8.29548 \times 10^{-12}$
6	$5.39879 \times 10^{-14}$
7	$-3.50874 \times 10^{-16}$
8	$2.27704 \times 10^{-18}$
9	$-1.47566 \times 10^{-20}$
10	$9.55092 \times 10^{-23}$

Por otro lado al realizar toda la sumatoria, el cálculo realizado para  $O(n)$  da como resultado que dicha serie converge al valor de:

$$O(n) = 0.995183; \quad (45)$$

Ya que el corrimiento de los niveles de energía está compuesto por dos factores, de primero y segundo orden de perturbación, teniendo en cuenta el signo en la ecuación (11) entonces:

$$\epsilon_{1s} = \frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2 \left[ -(O(n))^2 + (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2})O_2(n) \right]. \quad (46)$$

Donde:

$$O_2(n) = \frac{6\mu\alpha}{\pi} (O(n))^2 = 1.67746 \quad (47)$$

$$\epsilon_{1s} = \frac{2}{3}\mu^2\alpha^3(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left[ -(0.995183)^2 + (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2})(1.6774) \text{ MeV} \right]; \quad (48)$$

donde las unidades de  $MeV$  se deben al factor de  $\mu$  en (47). Análogamente para  $\Gamma_{1s}$  se tiene:

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9}Q\mu^2\alpha^3 \left[ a_0^{3/2} - a_0^{1/2} \right]^2 (O(n))^2; \quad (49)$$

donde  $|Q| = 28.05 \text{ MeV}$  es el momento para el cual la energía se conserva [14]. Según estas ecuaciones se puede hacer un análisis para tres casos, sin correcciones, con correcciones de primer orden y para correcciones de segundo orden. En el caso en que no se consideran correcciones, se tiene las fórmulas *DGBT* [15]:

$$\epsilon_{1s} = \frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2; \quad (50)$$

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9}\pi\frac{Q}{\mu} \left[ a_0^{3/2} - a_0^{1/2} \right]^2 [\Psi_{1s}(0)]^2. \quad (51)$$

Ahora, si se considera la primera corrección se tiene:

$$\epsilon_{1s} = \frac{2}{3}\mu^2\alpha^3(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left[ -(0.995183)^2 \right]; \quad (52)$$

mientras que  $\Gamma_{1s}$  esta dada por (49). Finalmente tomando correcciones de segundo orden,  $\epsilon_{1s}$  esta dado por (48). Usando los valores medidos para  $\epsilon_{1s}$  y  $\Gamma_{1s}$ , considerando un rango de 4 incertidumbres en cada uno de los casos, con y sin correcciones (fórmulas *DGBT*), se obtuvieron las regiones de convergencia para los valores de las longitudes de dispersión de ondas  $s$ . Los resultados son mostrados en las figuras (3), (4), (5):

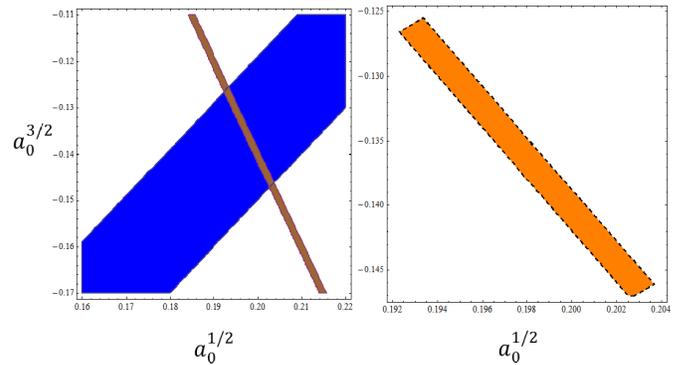


Figura 3. Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas  $s$ ; usando las fórmulas *DGBT*. La región café  $\epsilon_{1s}$ , región azul  $\Gamma_{1s}$ . A la derecha región de convergencia del sistema, a la izquierda la región de convergencia ampliada.

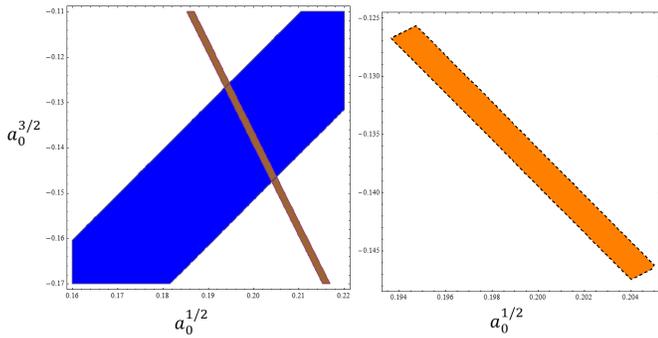


Figura 4. Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas  $s$ , con correcciones de primer orden. La región café  $\epsilon_{1s}$  y azul  $\Gamma_{1s}$ . A la derecha región de convergencia del sistema, a la izquierda la región de convergencia ampliada.

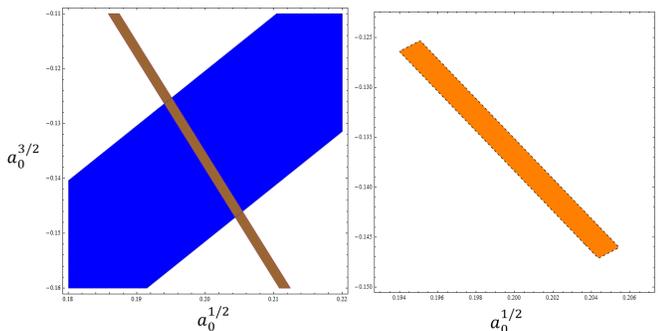


Figura 5. Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas  $s$ ; con correcciones de segundo orden. La región café  $\epsilon_{1s}$ , azul  $\Gamma_{1s}$ . A la derecha región de convergencia del sistema, a la izquierda región de convergencia ampliada.

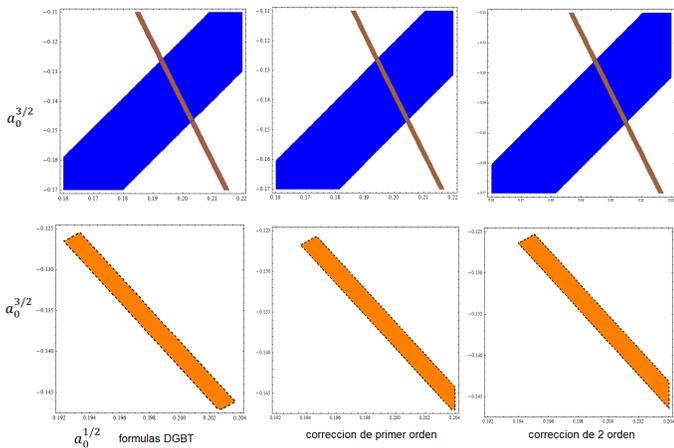


Figura 6. Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas  $s$ , considerando los tres casos de correcciones a la misma escala. Región café  $\epsilon_{1s}$ , azul  $\Gamma_{1s}$ . En la parte superior se presenta la región de convergencia del sistema para las dos soluciones, en la parte inferior se muestra la región de convergencia ampliada.

### VIII. CONCLUSIONES

Con un análisis detallado de las regiones que solucionan el sistema de ecuaciones para  $\epsilon_{1s}$  y  $\Gamma_{1s}$ , es posible extraer los valores aceptables para las longitudes de dispersión de ondas  $s$ . En cuanto a las fórmulas DGBT (Figura 3) son para  $a_0^{1/2}$   $[0.192875, 0.203125] \pm 0.000625$ ; mientras que para  $a_0^{3/2}$

$[-0.1467, -0.1259] \pm 0.0006$  aproximadamente. Por otro lado, los valores obtenidos considerando corrección de primer orden (ver Figura 5) son  $a_0^{1/2}$   $[0.194125, 0.2045] \pm 0.000625$ ; y para  $a_0^{3/2}$   $[-0.14675, -0.12615] \pm 0.00075$ . Finalmente, tomando el segundo término de la serie de Dayson (Figura 6) se obtuvo  $a_0^{1/2}$   $[0.1944, 0.2048] \pm 0.0006$ ; y  $a_0^{3/2}$   $[-0.14675, -0.12575] \pm 0.00075$ , todos los valores en unidades de  $1/m\pi^-$ . Se puede apreciar un corrimiento a la derecha de las regiones calculadas con correcciones respecto a la región encontrada para las fórmulas DGBT. En la (Figura 6), se muestra a la misma escala, el efecto de las correcciones obtenidas.

En conclusión, no es posible dar un valor definitivo para las longitudes de dispersión de ondas  $s$  en la interacción pión-nucleón. Esto se debe a la complejidad del problema, y las aproximaciones que se aplican. Además, al comparar los resultados obtenidos aquí con los diferentes trabajos realizados y publicados por otros autores, estos valores varían considerablemente. Sin embargo para este trabajo los valores de las longitudes de dispersión de ondas  $s$ , pierden relevancia en cuanto a que la finalidad es encontrar una solución simultánea al sistema de ecuaciones para diferentes estados ligados.

Para concluir si los resultados obtenidos para  $a_0^{1/2}$  y  $a_0^{3/2}$  son aceptables o no es necesario realizar los cálculos para otros estados ligados; como el deuterio piónico  $D\pi$ , o el hidrógeno kaónico  $Hk$  con la finalidad de buscar región de convergencia completa simultánea, que involucre todos los estados y obtener así un resultado más preciso. Dicho trabajo queda como una extensión a este, ya que aquí se desarrolló solo el estado  $H\pi$ . Por ahora encontramos que dicha región existe para el átomo  $H\pi$ , luego el método se da correcto hasta este punto.

### REFERENCIAS

- [1] J. Gasser, V.E. Lyubovitskij and A. Rusetsky, Phys.Rept. 456, 167, (2009).
- [2] A. N. Ivanov, M. Faber, J. MArón, N. I. Troitskaya. Energy level displacement of the excited  $nl$  state of pionic hydrogen. Eur.Phys.J.A. 19, 13 (2014).
- [3] P. A. M.Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, (Ediciones Ariel Esplugues de Llobregat, Barcelona 1967), pp. 148-164.
- [4] Claude Itzicson and Jean-Bernard Zuber, Quantum Field Theory, (MacGraw-Hill, 1980), pp. 32-126.
- [5] J. Gasser, V.E. Lyubovitskij and A. Rusetsky, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 59, 169 (2009).
- [6] S.S Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, (Row, Peterson and co. Evaston III, Elmsford, New York, 1961), pp.330-338.
- [7] N. Zettili, Quantum Mechanics, Concepts and applications, (Jacksonville State University 2001), pp. 549-554.
- [8] H.J. Weber, G.B. Arfken, Essential mathematical methods for physicists (2003), pp. 86-95, 589-637.
- [9] A. N. Ivanov, M. Faber, A. Hirtl, J. Marton, N. I. Troitskaya, Eur.Phys.J.A. 18, 653 (2003).

- [10] J. Alonso Mendoza S, A. Delgado Solano, Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas. 12, 83 (2014).
- [11] M. Abramowitz and I. E. Stegun, Handbook of mathematical functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, (U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, 1972), pp. 376, 486.
- [12] K.A. Olive *et al*, Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).
- [13] T.E.O. Ericson, B. Loiseau and S. Wycecha, Int.J.Mod.Phys.A. 20, 1650, (2004).
- [14] A. Delgado Solano, J.A. Mendoza Suarez, Bistua Revista de la Facultad de Ciencias Basicas. 11, 55 (2013).
- [15] S. Deser, M. L. Goldberger, K. Baumann, W. Thirring, Phys. Rev. 96, 774 (1954).