

# CÁLCULO DEL PARÁMETRO DE NO EXTENSIVIDAD EN EL MODELO DE INTERACCIÓN FRAGMENTO-ASPEREZA PARA LOS SISMOS DEL ECUADOR MEDIANTE UN MÉTODO BAYESIANO

COMPUTATION OF THE NONEXTENSIVITY PARAMETER IN THE FRAGMENT-ASPERITY MODEL FOR THE ECUADORIAN SEISMIC CATALOG BY A BAYESIAN APPROACH

S. ARAUJO <sup>a,b,†</sup>

a) Universidad Politécnica Salesiana, Quito, Ecuador

b) Universidad Regional Amazónica Ikiám, Tena, Ecuador; jose.araujo@ikiám.edu.ec<sup>†</sup>

† autor para la correspondencia

Recibido 14/6/2017; Aceptado 25/9/2017

El presente artículo muestra la aplicación de la teoría de la interacción fragmento-asperidad al catálogo de sismos del Ecuador. Este catálogo contiene sismos generados por una subducción oblicua, por el movimiento de una astilla de placa y por varias fallas superficiales. En este escenario se calcula el parámetro de no extensividad  $q$  de la teoría y se lo compara con el de otras regiones. El valor de  $q$  para el Ecuador resulta en un valor mayor que para otros catálogos sísmicos. Se calcula el parámetro  $q$  de dos tipos de sismicidad originados en procesos físicos diferentes: los sismos superficiales y los sismos de profundidad intermedia. Se obtiene para estos últimos un valor de  $q$  ligeramente mayor que para los primeros. Un aporte esencial de este artículo es mostrar el cálculo del parámetro  $q$  mediante un algoritmo que resuelve el problema inverso desde una enfoque bayesiano.

This article shows the application the fragment-asperity interaction theory to the earthquakes catalog of Ecuador. This catalog contains earthquakes generated by an oblique subduction, by the movement of a sliver plate and by several shallow faults. In this scenario, the nonextensive  $q$  parameter of the theory is calculated and it is compared with other regions. The  $q$  parameter for Ecuador is higher than for other seismic catalogs. We compute the parameter  $q$  of two types of seismicity originated in different physical processes: shallow earthquakes and intermediate-depth earthquakes. For the latter, the value of  $q$  is slightly higher than for the former. An essential contribution of this article is to show the calculation of the  $q$  parameter by an algorithm that solves the inverse problem from a Bayesian approach.

PACS: Earthquakes, 91.30.Px; Inverse problems, 02.30.Zz; Entropy thermodynamics, 05.70.-a

## I. INTRODUCCIÓN

La redefinición de la entropía propuesta por Constantino Tsallis [1] como una cantidad no extensiva, ha sido utilizada con éxito para dar un fundamento teórico a la ley Gutenberg-Richter de los sismos mediante el modelo de interacción fragmento-asperidad propuesto por Sotolongo-Costa y Posadas [2].

El modelo de Sotolongo-Costa y Posadas (S-P) hereda de la entropía de Tsallis el parámetro de no extensividad  $q$  que necesita ser determinado a partir de los datos experimentales. Las diversas mediciones de este parámetro en varios conjuntos de sismos alrededor del mundo indican valores entre  $q \sim 1.6$  y  $q \sim 1.7$ . Por ejemplo en el catálogo de toda la Península Ibérica  $q = 1.64$  [2], en el de la región de Andalucía  $q = 1.60$  [2] y en el estado de California  $q = 1.65$  [2].

En el presente estudio se pretende aplicar el modelo S-P a la totalidad del catálogo en toda la extensión de un país. Para este caso también existen ejemplos, como el catálogo histórico de sismos con magnitud  $m \geq 6$  de China donde se obtiene  $q = 1.69$  [3]. Otro estudio son los catálogos sísmicos del Istmo de Panamá donde para el catálogo principal en todo el país se obtiene  $q = 1.69$  [4], para el catálogo de la región fronteriza con Costa Rica  $q = 1.65$  [4] y para la zona del Canal de Panamá  $q = 1.70$  [4].

La particularidad de la aplicación del modelo S-P al catálogo sísmico del Ecuador, se justifica al tratarse de un borde convergente muy activo ocasionado por la subducción de la placa de Nazca debajo de la placa Sudamericana [5], lo cual produce no sólo sismos de subducción sino además un gran número de terremotos crustales de magnitud considerable ( $m > 5$ ) [5]. Otra característica singular de la sismicidad ecuatoriana es que la subducción sigue una geometría oblicua, haciendo que una parte de la corteza conocida como la astilla Norandina, se desprenda de la la corteza continental Sudamericana moviéndose hacia el norte [6]. Este rompimiento entre la astilla Norandina y la placa Sudamericana ocasiona un sistema de fallas muy activo conocido como Chingual-Cosanga-Pallatanga-Puná (CCPP) [6] responsable de algunos de los terremotos históricos más devastadores de la región andina del Ecuador [7].

Una de los retos de la aplicación de los modelos de sismicidad basados en el enfoque no extensivo es el relacionar el parámetro  $q$  con alguna característica del modelo físico de la producción de los sismos. El catálogo ecuatoriano permite de una manera clara separar dos tipos de fenómenos sísmicos diferentes, relacionados con la profundidad de los mismos. Efectivamente, existe una frontera clara entre los sismos superficiales, que se generan por fenómenos de fractura y rozamiento de materiales

frágiles, y los sismos de profundidad intermedia. Estos sismos de profundidad intermedia se consideran localizados a profundidades entre  $\sim 70\text{ km}$  y  $\sim 300\text{ km}$  [8–10]. Su mecanismo de generación no está todavía completamente explicado, siendo la fragilización por deshidratación es uno de los fenómenos físicos posibles para generarlos [8–10].

De estudios precisos de relocalización de la sismicidad en Ecuador mediante métodos de tomografía sísmica [11], se puede establecer que la frontera entre los sismos superficiales y los sismos de profundidad intermedia se produce a los  $75\text{ km}$ , pues es a esta profundidad donde aparecen los nidos de sismicidad intermedia en la región del Ecuador [11].

El objetivo de este artículo es mostrar la aplicación de la entropía de Tsallis y de la teoría de la interacción fragmento-aspereza a la totalidad del catálogo sísmico del Ecuador calculando su parámetro de no extensividad  $q$ . Luego se procederá al mismo cálculo separando los sismos superficiales, con profundidad menor a los  $75\text{ km}$ , de la sismicidad intermedia con profundidades que alcanzan desde los  $75\text{ km}$  hasta los  $350\text{ km}$ .

Otro problema importante en el uso de los modelos no extensivos de las sismicidad es la resolución del problema inverso que resulta al tratar de ajustar los datos con el modelo. Algunas de las opciones para este cálculo han sido los mínimos cuadrados no lineales de Levenberg–Marquadt [12] o el método de máxima verosimilitud [13]. En este artículo se muestra el uso del método de inversión que generaliza los mínimos cuadrados para problemas no lineales propuesto por A. Tarantola y B. Valette [14].

## II. EL MODELO DE UN SISMO COMO LA INTERACCIÓN FRAGMENTO-ASPEREZA

Si bien existen numerosas aplicaciones de la entropía de Tsallis al estudio de los terremotos, es preciso reconocer que el modelo que posee la mayor base física y que aporta a la comprensión del fenómeno es el modelo de la fragmentación de asperezas de Sotolongo y Posadas (S-P). Este modelo consigue demostrar que la ley de Gutenberg-Richter es sólo la aproximación de una ley más general, deducida a partir de considerar el origen de los sismos como la ruptura de las anfractuosidades que juntan una falla sísmica [2].

Si comenzamos con la definición de la entropía de Tsallis para el caso de una distribución de probabilidad discreta que depende del parámetro  $q$ :

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad (1)$$

$W$  es el número total de configuraciones cuyas probabilidades son el conjunto  $\{p_i\}$ .

La mejor manera de ver la relación de esta fórmula (1) con la expresión clásica de la entropía de Boltzman-Gibbs es reescribirla como:

$$S_q = k \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \frac{1}{p_i}, \quad (2)$$

donde se ha definido una nueva función:

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (3)$$

Siendo  $q \in \mathbb{R}$  el parámetro que permite cuantificar la complejidad del sistema. Si tomamos el límite de (3) cuando  $q \rightarrow 1$  obtenemos la función logaritmo natural y por lo tanto (2) se transforma en la entropía de Boltzman-Gibbs  $S = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$ . Por lo tanto el sistema podrá considerarse como complejo cuando  $q \neq 1$ .

Para el modelo S-P debemos utilizar la forma continua de la entropía de Tsallis:

$$S_q = k \frac{1 - \int p^q(\sigma) d\sigma}{q - 1}. \quad (4)$$

Siendo  $p(\sigma)$  la probabilidad de encontrar un fragmento de superficie  $\sigma$  dentro de la falla sísmica. Lo importante del modelo S-P es que logra relacionar la superficie del fragmento a la energía del sismo que se produciría si éste se rompiera.

Puesto que la energía es una medida de la magnitud finalmente se obtiene que el número de sismos con una magnitud mayor que un valor  $m$ ,  $N(> m)$ , que se producen durante la fragmentación de la aspereza es [2]:

$$\log(N(> m)) = \log N + \left( \frac{2 - q}{1 - q} \right) \times \times \log \left[ 1 + a(q - 1)(2 - q)^{(1-q)/(q-2)} 10^{2m} \right]. \quad (5)$$

Con  $N$  el número total de sismos considerados en el estudio y  $a$  un parámetro de proporcionalidad.

El resultado se expresa como un logaritmo en base 10 ya que nos permite relacionarlo con la fórmula de Gutenberg-Richter:

$$\log(N(> m)) = c_1 - c_2 m. \quad (6)$$

Vemos pues que el modelo S-P generaliza la ley de Gutenberg-Richter, ya que la ecuación (6) es solamente un caso particular de la ecuación (5).

## III. DATOS Y CÁLCULO DE PARÁMETROS

Los datos para este estudio provienen del Catálogo Sísmico del Instituto Geofísico de la Escuela Politécnica Nacional del Ecuador. Este catálogo comprende los terremotos registrados en el territorio ecuatoriano desde el año 1901 hasta el 27 de agosto de 2016. Estos son 12 016 sismos con valores de magnitud entre 3 y 8.35. La distribución de los sismos en función de su magnitud se muestra en la Figura (1).

Para calcular sobre estos datos los parámetros de complejidad  $q$  y de proporcionalidad  $a$  que aparecen en la ecuación (5) usaremos la solución del problema inverso desde la perspectiva bayesiana [14]. En este caso escribimos estos parámetros en un vector  $\mathbf{v}$  y utilizamos como vector de datos

$\mathbf{d}$  el logaritmo del número de eventos mayor que  $m$ . Por lo tanto el problema directo queda:

$$\mathbf{d} = g(\mathbf{v}), \quad (7)$$

Donde  $g$  es la relación funcional dada por el modelo S-P (5).

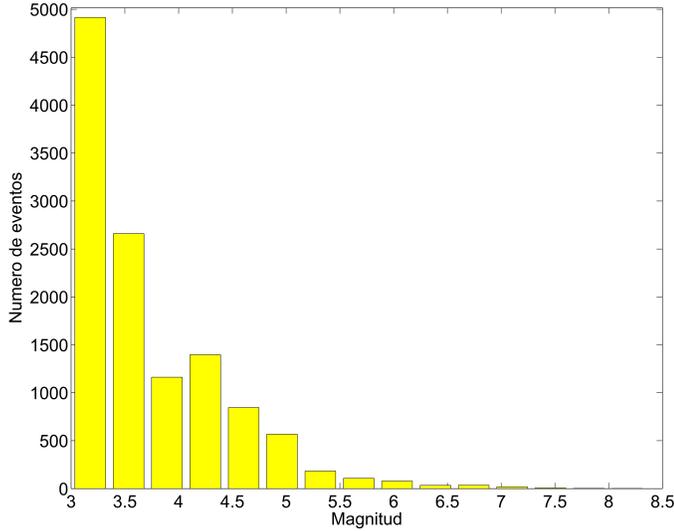


Figura 1. Histograma del número de eventos sísmicos en función de su magnitud en el catálogo del Instituto Geofísico del Ecuador.

Para obtener  $\mathbf{v}$  a partir de (7) debemos resolver un problema inverso no lineal que se obtiene en la convergencia del algoritmo [14]:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_0 + C_v C_k^* (C_d + G_k C_v C_k^*)^{-1} \times [\mathbf{d} - g(\mathbf{v}_k) + G_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0)]. \quad (8)$$

Donde  $G$  es la matriz de derivadas parciales y  $G^*$  su transpuesta:

$$G = \left[ \frac{\partial}{\partial q} \log(N(> m)) \quad \frac{\partial}{\partial a} \log(N(> m)) \right]. \quad (9)$$

Las derivadas para el cálculo de  $G$  en nuestro caso son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \log(N(> m)) &= \frac{1}{(1-q)^2} \log \left[ 1 + a(q-1)(2-q)^{(1-q)/(q-2)} 10^{2m} \right] + \\ &+ \left( \frac{2-q}{1-q} \right) \frac{\log(e) a 10^{2m}}{\left[ 1 + a(q-1)(2-q)^{(1-q)/(q-2)} 10^{2m} \right]} \times \\ &\times \left[ (2-q)^{(1-q)/(q-2)} + \right. \\ &\left. + (q-1)(1-q + \ln(2-q))(2-q)^{(5-3q)/(q-2)} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \log(N(> m)) = \frac{-\log(e) 10^{2m} (2-q)^{1/(2-q)}}{\left[ 1 + a(q-1)(2-q)^{(1-q)/(q-2)} 10^{2m} \right]}.$$

Para el valor inicial de los parámetros tomamos la referencia los estudios anteriores en otros catálogos sísmicos [2]  $q_0 = 1.6$  y  $a_0 = 3 \times 10^{-6}$ .

Las matrices  $C_v$  y  $C_d$  son matrices de covarianza cuadradas que tienen en su diagonal la varianza sobre los parámetros a priori y sobre los datos respectivamente. Para la varianza inicial de los parámetros empezamos con un valor

suficientemente grande  $\sigma_{q_0}^2 = \sigma_{a_0}^2 = 100$  que garantice una oscilación considerable en las primeras iteraciones del algoritmo. Para la varianza de los datos, puesto que el catálogo ecuatoriano no informa el error en el cálculo de la magnitud, asumimos un error para la magnitud de  $\sigma_d = 0.1$ .

Con estos valores a priori y con los mencionados valores de covarianza, el algoritmo (8) converge en una pocas iteraciones. En diez iteraciones el algoritmo se estabiliza en los valores  $q = 1.71$  y  $a = 4.31 \times 10^{-6}$ . El ajuste de los datos con la función definida con los parámetros calculados se puede apreciar en la figura (2).

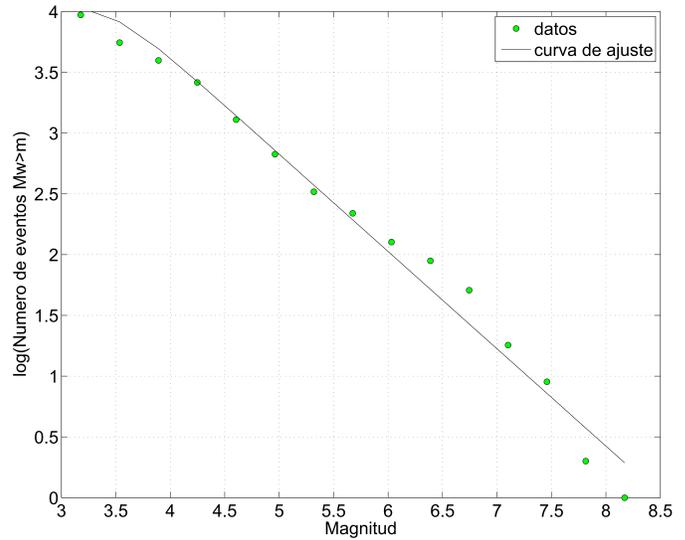


Figura 2. Se muestran con pequeños círculos el logaritmo del número de eventos con magnitud mayor a  $m$  en función de  $m$ . Se indica también con una línea continua la curva de ajuste con los parámetros obtenidos mediante la inversión bayesiana.

En cuanto al error que cometemos en este ajuste, se puede calcular mediante la aproximación bayesiana la matriz de covarianzas a posteriori para los parámetros [14]:

$$C_v = \left( G^* C_d^{-1} G + C_{v_{\text{a priori}}}^{-1} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Esto nos permite encontrar  $\sigma_q = 5 \times 10^{-3}$  y  $\sigma_a = 1.95 \times 10^{-6}$ . Claramente estos son valores que han convergido correctamente desde los valores que tomamos como a priori  $\sigma_q = \sigma_a = 10$ .

Los sismos del catálogo ecuatoriano se separan ahora en dos conjuntos de acuerdo a su profundidad: 10 033 son sismos superficiales que tienen profundidad menor a 75 km y 1 978 son sismos de profundidad intermedia que se localizan a profundidades mayores o iguales a la cota de 75 km. El conjunto de sismos de profundidad intermedia no incluye cinco sismos del catálogo principal que se localizan a profundidades mayores a 350 km.

Bajo el esquema de inversión del algoritmo (8) el valor del parámetro de no extensividad para los sismos superficiales del Ecuador es  $q = 1.72$  con  $\sigma_q = 5 \times 10^{-3}$ . Para los sismos de profundidad intermedia en cambio  $q = 1.74$  con  $\sigma_q = 7 \times 10^{-3}$ .

#### IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Para obtener el parámetro de no extensividad del modelo S-P se ha mostrado la implementación que resuelve el problema inverso desde un enfoque bayesiano. En los sismos del catálogo sísmico ecuatoriano, el parámetro de no extensividad toma un valor de  $q = 1.71 \pm 0.005$ . Para los sismos superficiales del Ecuador  $q = 1.72 \pm 0.005$  y para los sismos de profundidad intermedia  $q = 1.74 \pm 0.007$ .

La primera constatación clara es que estos valores de  $q$  son mayores que los calculados en otras regiones del planeta usando la teoría S-P [2–4]. El parámetro  $q$  puede interpretarse como una medida cuantitativa de la longitud de escala en las interacciones espaciales [12]. Esto querría decir que mientras mayor sea el valor de  $q$ , el sistema formado por toda la sismicidad, tiene un mayor número de componentes que no pueden ser analizados de forma separada pues todos se hallan interrelacionados. En el caso de los sismos del Ecuador, el alto valor de  $q$  respecto a otros catálogos sísmicos se explicaría en que la totalidad de los sismos ecuatorianos se producen en diversas fenómenos todos muy relacionados entre sí como son: la subducción de la placa de Nazca, el escape hacia el norte de la astilla Norandina y las abundantes fallas de la corteza.

El valor de  $q = 1.72$  para los sismos superficiales es ligeramente menor que el  $q = 1.74$  para los sismos de profundidad intermedia. Puesto que el mecanismo de generación de los sismos de profundidad intermedia no está completamente esclarecido, la sola conclusión por el momento es que el parámetro  $q$  puede indicar efectivamente una diferencia en la fuente de origen de los dos tipos de sismos.

En lo que respecta al parámetro de proporcionalidad  $a$  de la teoría S-P, el valor que se obtiene para los sismos del Ecuador es  $a = 4.31 \times 10^{-6} \pm 1.95 \times 10^{-6}$ . La indeterminación importante en el valor de este parámetro es sobre todo función del valor del error de los datos que hemos considerado.

El aporte más importante a la sismología desde los resultados de este estudio, es mostrar que los sismos con magnitud menor a 3.5 no siguen la relación lineal de la ley Gutenberg-Richter. Como se muestra en la figura (2), para las magnitudes menores que 3.5 hay un cambio de pendiente en la curva de ajuste calculada con la teoría S-P. Los estudios anteriores para la ley Gutenberg-Richter con los datos del catálogo ecuatoriano se restringen solamente a las magnitudes  $4 \leq m \leq 7.5$  [15]. Este estudio amplía el análisis a todo el rango de magnitudes presentes en el catálogo. Esta conclusión respecto a los sismos de pequeña magnitud está

respaldada en el hecho de que en el catálogo ecuatoriano, los sismos con magnitud menor a 4 se incorporan solamente a partir del año 1997. La magnitud de estos sismos poco energéticos ha sido además cuidadosamente revisada y homogenizada para su incorporación al catálogo general [15].

#### AGRADECIMIENTOS

Los comentarios y correcciones de un árbitro anónimo han sido invaluable en la elaboración de este artículo.

#### REFERENCIAS

- [1] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics - Approaching a Complex World*, (Springer, 2009).
- [2] O. Sotolongo-Costa and A. Posadas, *Phys. Rev. Lett.* 92, 04850-1 (2004).
- [3] O. Sotolongo-Costa, *Acta Geophys.* 60, 526 (2012). <https://doi.org/10.2478/s11600-012-0010-3>
- [4] D. Samudio, P. Weigandt, J. Toral, and O. Sotolongo-Costa, *Nova Scientia* 7, 149 (2015).
- [5] H. Yepes, L. Audin, A. Alvarado, C. Beauval, J. Aguilar, Y. Font and F. Cotton, *Tectonics* 35, 1249 (2016)
- [6] A. Alvarado, L. Audin, J. M. Nocquet, E. Jaillard, P. Mothes, P. Jarrín, M. Segovia, F. Rolandone, and D. Cisneros, *Tectonics* 35, 1048 (2016).
- [7] C. Beauval, H. Yepes, W.H. Bakun, J. Egred, A. Alvarado and J.C. Singaicho. *Geophys. J. Int.* 181, 1613 (2010).
- [8] H. Houston, *Deep earthquakes, Treatise on Geophysics*, 2nd Ed. (Elsevier, Amsterdam, 2007), pp. 321–350.
- [9] C. Frohlich and Y. Nakamura, *Phys. Earth Planet. Inter.* 173, 365 (2009).
- [10] G.A. Prieto, G.C. Beroza, S.A. Barrett, G.A. López, and M. Florez. *Tectonophysics*, 570, 42-56 (2012)
- [11] S. Araujo, "Travel time tomography of the crust and the mantle beneath Ecuador from data of the national seismic network". Tesis de doctorado, University of Grenoble Alpes, 2016.
- [12] L. Telesaca, *Tectonophysics* 494, 155 (2010).
- [13] L. Telesaca, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 102, 886 (2012).
- [14] A. Tarantola and B. Valette, *Rev. Geophys.* 20, 219 (1982).
- [15] C. Beauval, Yepes, H., Palacios, P., Segovia, M., Alvarado, A., Font, Y., Aguilar, J., Troncoso, L., and S. Vaca, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 103, 773 (2013).