



## Ordenadores, vídeos y simulaciones durante el estudio del movimiento browniano

R. Valdés Castro<sup>a</sup> y V. Tricio<sup>b</sup>

Departamento de Física, Universidad de Burgos, España.

a) Escuela Politécnica Superior, rvaldes@ubu.es†

b) Facultad de Ciencias, vtricio@ubu.es

†autor para la correspondencia

Recibido el 1/06/2007. Aprobado en versión final el 15/06/2007.

**Sumario.** El movimiento browniano es un fenómeno cuyo estudio fue clave para el avance de la Física y de la Química en los inicios del siglo XX. Es hoy una temática de actualidad, como lo evidencian el desarrollo de la teoría de fractales, las investigaciones sobre contaminación ambiental y motores brownianos. Estudiar experimentalmente dicho fenómeno y simularlo, constituyen actividades de aprendizaje de especial importancia y vigencia en la formación científica universitaria. Ello es particularmente factible en nuestros días, gracias al amplio uso de los ordenadores y de la fotografía digital. En nuestro trabajo mostramos vías sencillas para la observación y filmación del movimiento browniano y, con ello, para la comprobación experimental de la fórmula de Einstein. En la realización de las mediciones empleamos el software *Análisis de Imágenes* creado por nosotros. Describimos también tareas docentes relativas a la simulación del movimiento de partículas brownianas y de la distribución de estas con la altura.

**Abstract.** Brownian motion is a phenomenon whose investigation was a key to advance of Physics and Chemistry in the beginnings of XX century. For experimental study of this phenomenon we have developed a set of activities. In our work we show a simple way to observe Brownian motion and for experimental verification of Einstein's formula. To accomplishment measurements we use our software *Análisis de Imágenes*. We also described activity about simulation of Brownian motion and particles distribution.

**Palabras clave.** Medios audiovisuales 01.50.F-, uso de computadoras en la enseñanza de Física 01.50.ht, Uso de computadoras en el laboratorio 01.50.Lc.

### 1 Introducción

Por su importancia y actualidad el movimiento browniano es un fenómeno ampliamente estudiado en los cursos de Física General. Facilitar su comprensión, observación y las mediciones que permiten caracterizarlo es una tarea de la didáctica de la Física, cuyas diversas soluciones son seguramente bien acogidas. Más aún, si ello va acompañado de materiales apropiados para la educación a distancia.

Nosotros hemos confeccionado un libro electrónico con exposiciones teóricas, vídeos ilustrativos, sistemas de tareas para el aprendizaje, problemas experimentales, simulaciones interactivas y una compilación de materia-

les de interés que abarca fragmentos de obras de Einstein, Perrin, Mandelbrot, etc. relativas al tema <sup>1</sup>. Son numerosos los trabajos ya realizados con propósitos similares, que han mostrado su utilidad. Del nuestro presentamos solamente algunos elementos los cuales, en nuestra opinión, pueden servir para incentivar la orientación investigadora del aprendizaje.

### 2 Observación y filmación del movimiento browniano

Con el objetivo de que pueda ser realizada fácilmente en cualquier centro universitario o instituto de enseñanza secundaria, utilizamos equipos típicos de un laboratorio

docente y materiales de bajo coste:

1) microscopio con aumento entre 600 y 1500, 2) pasta de acuarela, pincel y recipiente con agua, 3) portaobjetos excavado, 4) cámara digital de 3 Mp o superior, con capacidad para tomar vídeos, 5) trípode (o equivalente construido con varillas metálicas, nueces y mordazas del laboratorio), 6) software para el procesamiento de vídeo.

Llenamos de agua la cavidad del portaobjetos. Si se deslíe acuarela en el agua (también leche, pasta dental, tinta china), se crea una suspensión de gránulos microscópicos de diferentes tamaños y formas (en sus experimentos Perrin usó gutagamba y mástique, resinas empleadas en la fabricación de pinturas y barnices). Una vez preparados la suspensión y el microscopio con alguno de los aumentos indicados, visualizamos el movimiento de los corpúsculos.

Conviene mostrar la imagen a los presentes con un televisor o proyectándola sobre una pantalla. Así el movimiento browniano se aprecia claramente cuando el aumento está entre 600 y 800. Si la suspensión de acuarela se prepara en un vaso de precipitado y es calentada durante 20 – 30 minutos a unos 80 °C, se detectan con el microscopio partículas brownianas esféricas.

Para filmar el movimiento de las partículas, el objetivo de la cámara fotográfica acoplada al trípode se coloca sobre el ocular del microscopio. Todo el sistema se ajusta hasta que en la pantalla LCD de la cámara se vean los corpúsculos en movimiento. El zoom del aparato permite aumentar aún más el tamaño de la imagen. En este punto, con la habitación a oscuras, se hace la filmación. La cámara digital puede estar conectada a un proyector o televisor, que hacen visibles las imágenes a todos.

Sobre la base de las técnicas descritas con anterioridad, hemos preparado tres vídeos que pueden ser utilizados para la realización de mediciones (Fig. 1). Estas últimas se llevan a cabo utilizando el software Análisis de Imágenes creado por nosotros <sup>2</sup>.

### 3 Comprobación experimental de la fórmula de Einstein

Después de estudiar las ideas fundamentales de la teoría del movimiento browniano se puede proponer a los alumnos la resolución del siguiente problema experimental:

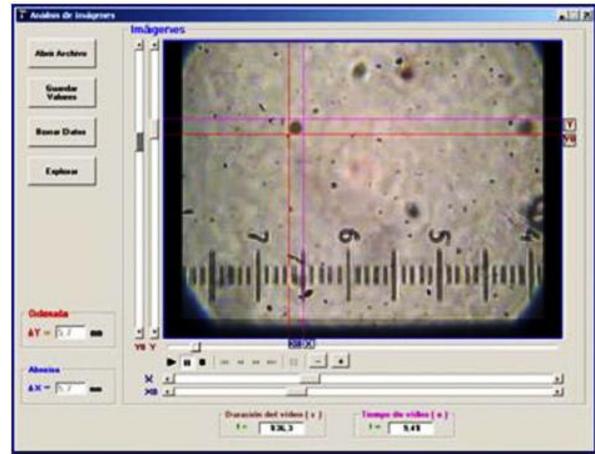
*Los vídeos de la serie Partículas Brownianas reproducen el movimiento de corpúsculos de acuarela en agua. Con el objetivo de comprobar la fórmula de Einstein:*

- *Utiliza el programa Análisis de Imágenes y los vídeos mencionados para comprobar la proporcionalidad directa entre  $\langle \Delta x^2 \rangle$  y  $\Delta t$ .*

- *Estima el número de Avogadro. Compara tus resultados con los que obtuviera Perrin.*

- *Menciona las principales fuentes de incertidumbres experimentales y cómo disminuirlas al realizar el experimento de comprobación de la fórmula de Einstein.*

- *Antes de hacer la experiencia confecciona previamente una guía donde indiques cómo procederás al hacer las mediciones y los cálculos. La temperatura del ambiente durante la filmación era de 20 °C. El coeficiente de viscosidad del agua a esa temperatura es  $\eta = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ .*



**Figura 1.** Partícula browniana observada con el software Análisis de Imágenes.

A continuación presentamos una idea global de la resolución de la tarea. Recordemos que para el caso de una partícula esférica de radio  $a$ , suspendida en un fluido de viscosidad  $\eta$ , resulta:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{RT}{N_A} \frac{\Delta t}{3\pi a \eta} \quad (1)$$

donde  $\langle \Delta x^2 \rangle$  es el valor del desplazamiento cuadrático medio de la partícula realizado en el lapso  $\Delta t$  y en la dirección  $x$ ,  $T$  es la temperatura absoluta,  $R$  la constante de los gases y  $N_A$  el número de Avogadro. Puesto que el movimiento browniano es isotrópico, se cumple  $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle = \langle \Delta z^2 \rangle$ .

En cada uno de los vídeos a que se refiere el enunciado del problema experimental, se selecciona un corpúsculo browniano esférico, cuyo recorrido se sigue a lo largo de toda la película. Determinando con el programa Análisis de Imágenes la posición del corpúsculo al cabo de intervalos de tiempo  $\Delta t = 1 \text{ s}$ , se obtiene una muestra experimental con más de 60 desplazamientos sobre el plano que denominamos XOY. En virtud de la equiprobabilidad de las direcciones de movimiento  $X$  e  $Y$ , las proyecciones de los desplazamientos sobre dichos ejes son estadísticamente equivalentes. Es decir, a los efectos de nuestro análisis los valores de  $\Delta y$  pueden ser tomados como de  $\Delta x$  y viceversa. De esta forma es posible contar con más de 120 datos experimentales para comprobar la relación (1).

Simbolicemos con la letra  $A$  el radio aparente de una partícula browniana, vista con el programa *Análisis de Imágenes*. Sea  $M$  el aumento del vídeo observado con el software. Entonces  $A = aM$ . Representemos con la letra  $d$  los valores de los desplazamientos en las direcciones  $X$  e  $Y$ , medidos directamente sobre los fotogramas y expresados con las unidades de longitud usadas en el software *Análisis de Imágenes*. En virtud de la isotropía del movimiento asociemos dichos valores al eje  $X$ . Entonces obtenemos  $\langle d^2 \rangle = M^2 \langle \Delta x^2 \rangle$ . Adecuando la fórmula de Einstein a nuestro experimento tenemos:

$$\langle d^2 \rangle = M^3 \frac{RT}{N_A} \frac{\Delta t}{3\pi A \eta} \quad (2)$$

La Tabla I y la Figura 2 son una muestra de resultados experimentales. Obsérvese en el gráfico, por una parte, el elevado coeficiente de correlación de las rectas ajustadas y, por otra; que la línea de pendiente mayor corresponde a la partícula de menor radio, como era de esperar si se cumple la relación de Einstein.

El gráfico experimental se utiliza para determinar el coeficiente de proporcionalidad  $M^3 \frac{RT}{N_A} \frac{1}{3\pi A \eta}$ , a partir

del cual estimamos el número de Avogadro. Si tomamos la temperatura de la muestra igual a la del ambiente durante la filmación ( $T = 293$  K), para los datos experimentales de la Tabla I obtenemos  $5,8 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  y  $6,6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  con las partículas 1 y 2 respectivamente.

Las principales fuentes de incertidumbre experimental en la solución del problema son los datos de la medición de tres magnitudes: los intervalos de tiempo  $\Delta t$ , la componente  $d$  de los desplazamientos brownianos y el radio aparente  $A$ .

Determinamos lapsos de 1, 2, ..., 8 segundos, conociendo que el vídeo pasa 25 fotogramas por segundo. De ahí que el error relativo máximo en la medición del tiempo no supere el 4%. Para disminuirlo habrá simplemente que aumentar la duración de los intervalos medidos.

Cuando localizamos con el programa *Análisis de Imágenes* la posición de un punto en un fotograma, el error con que se mide tiene la misma probabilidad de ser por exceso que por defecto. En el cálculo de  $\langle d^2 \rangle$  tales errores aleatorios prácticamente se compensan si el número de mediciones es suficientemente elevado. Para disminuir la incertidumbre en la medición de  $\langle d^2 \rangle$  es clave aumentar la cantidad de datos de la muestra estadística. De este modo, el estimado de  $\langle d^2 \rangle$  también se aproximará mejor a su límite estadístico.

La correcta determinación del diámetro de la partícula es decisiva en el cálculo del número de Avogadro. Dependiendo de la profundidad a que se halla el corpúsculo en la suspensión acuosa, se observa como si cambiara de tamaño. Nosotros hallamos el diámetro de la partícula, promediando tres medidas realizadas a partir de foto-

gramas en los que el corpúsculo se aprecia con las mayores dimensiones. Excluimos, claro está, las imágenes de difracción fácilmente distinguibles por el punto luminoso central.

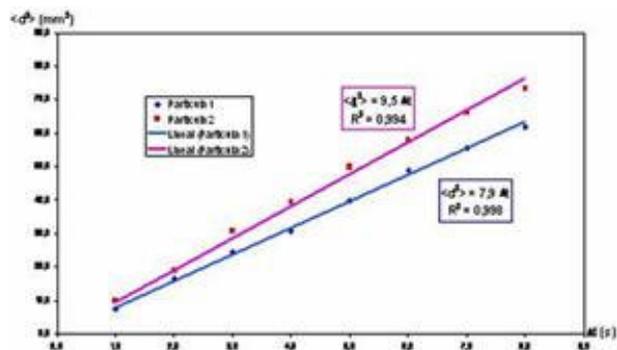


Figura 2. Gráfico experimental.

|                | Partícula 1           | Partícula 2           |
|----------------|-----------------------|-----------------------|
|                | $A = 2,8 \text{ mm}$  | $A = 1,95 \text{ mm}$ |
| $\Delta t$ (s) | $\langle d^2 \rangle$ | $\langle d^2 \rangle$ |
| 1,0            | 7,5                   | 10,0                  |
| 2,0            | 16,4                  | 19,0                  |
| 3,0            | 24,4                  | 30,6                  |
| 4,0            | 30,9                  | 39,6                  |
| 5,0            | 39,9                  | 49,9                  |
| 6,0            | 48,8                  | 57,9                  |
| 7,0            | 55,7                  | 66,4                  |
| 8,0            | 62,0                  | 73,2                  |

Examinar las principales fuentes de error en la experiencia descrita, crea el contexto apropiado para plantear la siguiente tarea <sup>3</sup>:

*Propón una versión mejorada de la experiencia que realizaste para validar la fórmula de Einstein. Halla la información necesaria en la Compilación de Materiales.*

El análisis de las fuentes de error, de cómo reducir las incertidumbres y precisar vías concretas para mejorar los resultados obtenidos se encuentran entre las actividades que consideramos para desarrollar la actitud crítica de los alumnos.

## 4 Simulaciones de movimiento browniano y distribución de partículas

A continuación enunciamos y resumimos la solución de algunas tareas relativas a la utilización de las técnicas de Montecarlo para construir modelos de suspensiones brownianas. He aquí algunos enunciados:

*Argumenta que los desplazamientos brownianos tienen distribución normal. Precisa la varianza y la esperanza matemática correspondientes.*

- *Construye un algoritmo para simular el movimiento de una partícula browniana en un plano horizontal.*

- Implementa en un programa informático un algoritmo para modelar la distribución de partículas brownianas con la altura.

Sobre la base del teorema central del límite en la teoría de las probabilidades, se argumenta el carácter normal de la distribución de los desplazamientos  $\Delta x$ . Por otra parte, se justifica que la esperanza matemática de los desplazamientos brownianos es cero y la varianza es  $\langle \Delta x^2 \rangle$ .

Describamos ahora cómo obtener valores de una magnitud aleatoria con distribución normal. Sean  $u_1$  y  $u_2$  los valores de dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme en  $(0, 1]$ . Para generar la variable  $r$  con distribución prácticamente normal, esperanza matemática  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , se emplea alguna de las dos fórmulas siguientes:

$$r = \sigma \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2) + \mu \quad (3)$$

$$r = \sigma \sqrt{-2 \ln u_1} \operatorname{sen}(2\pi u_2) + \mu \quad (4)$$

El software habitualmente utilizado durante la realización de cálculos numéricos, tiene incorporado algún generador de números pseudoaleatorios en el intervalo  $[0, 1]$  que satisface las condiciones para simular  $r$  mediante las fórmulas (3) ó (4). Otra alternativa de simulación de variables aleatorias con distribución normal, más lenta, es utilizar el propio teorema central del límite.

En calidad de material didáctico nosotros elaboramos el vídeo *Modelo de Movimiento Browniano*, que construimos ensamblando fotogramas generados a partir de los procedimientos descritos para la modelación de la distribución normal. Cada fotograma (Fig. 3) simula la posición de partículas brownianas esféricas ( $a = 2,12 \cdot 10^{-5}$  cm), suspendidas en agua a 20 °C. En el algoritmo de cálculo consideramos variables aleatorias independientes a las componentes  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) de los desplazamientos en el plano. También impusimos la condición de que estuvieran normalmente distribuidas con esperanza matemática  $\mu = 0$  y dispersión  $D = \frac{RT}{N_A} \frac{\Delta \tau}{3\pi a \eta}$ ; donde

$\Delta \tau = 0,04$ s, es el intervalo de tiempo entre dos fotogramas.

En relación con esta simulación, es posible plantear a los alumnos la tarea siguiente:

*¿Corresponderán a la fórmula de Einstein y tendrán distribución normal los desplazamientos de las partículas brownianas del vídeo, cuando se midan al cabo de intervalos de tiempo  $\Delta t > \Delta \tau$  ?*

La pregunta anterior se responde utilizando nociones básicas de la teoría de las probabilidades <sup>4</sup>.

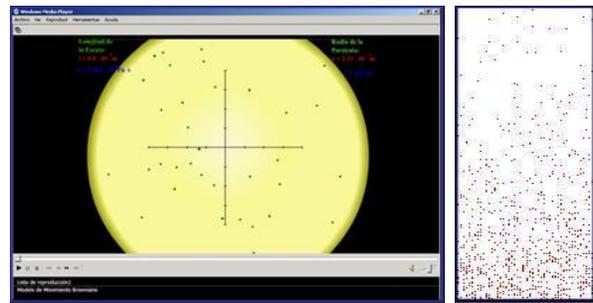
Analicemos ahora la simulación de la distribución exponencial de las partículas brownianas con la altura  $z$ . En este caso habrá que considerar la densidad de probabilidad

$$f(z) = \alpha e^{-\alpha z} \quad (5)$$

donde  $\alpha = \frac{4}{3} \frac{\pi a^3 (\rho - \rho_0) g}{kT}$  coincide con la esperanza matemática y la coordenada  $z$  toma valores en el intervalo  $[0, \infty)$ . En la expresión anterior  $\rho$  y  $\rho_0$  son las densidades de las partículas y del fluido respectivamente,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $k$ , la constante de Boltzmann.

El procedimiento de Montecarlo que permite obtener los valores de la variable aleatoria con las características dadas, se reduce a lo siguiente:

1. Definir el número total  $n$  de partículas que se observarán.
2. Definir la constante  $\alpha$ .
3. Generar la variable aleatoria  $u_1$  con distribución uniforme en  $(0, 1]$ .
4. Calcular  $z = -\frac{1}{\alpha} \ln u_1$ .
5. Repetir  $n$  veces los pasos 3 y 4.



**Figura 3.** (Izq). Fotograma del vídeo de simulación Movimiento Browniano. **Figura 4.** (Der). Distribución exponencial de las partículas.

Si siguiendo el algoritmo anteriormente descrito se determinan las coordenadas de las partículas en la dirección vertical. Para calcular las coordenadas de los corpúsculos en una dirección perpendicular al eje  $Z$ , tomamos en cuenta la equiprobabilidad de las posiciones en un plano horizontal de la suspensión simulada. Supongamos que en la dirección  $X$ , es  $b$  la longitud de la arista de cierta cavidad rectangular que contiene la muestra. Entonces, en esa dirección las coordenadas tienen distribución uniforme en  $[0, b]$ . Las coordenadas  $x$  se calculan mediante el siguiente procedimiento:

1. Definir el valor de la arista  $b$  de la cavidad.
2. Generar la variable aleatoria  $u_2$  con distribución uniforme en  $[0, 1]$ .
3. Calcular los valores de  $x = b \cdot u_2$ , en  $[0, b]$ .

Un programa hecho con *Mathematica* ejecuta los algoritmos descritos y representa gráficamente la distribución exponencial de las partículas brownianas (Fig. 4).

## 5 Conclusiones

Los experimentos que realizó Perrin son completos y únicos. Hoy, sin grandes recursos, las nuevas tecnologías informáticas posibilitan que los estudiantes realicen al-

gunas actividades intelectuales similares a las que hicieron él y sus colaboradores.

El estudio de algoritmos para la modelación del comportamiento de las partículas brownianas permite aplicar y consolidar conocimientos básicos de la teoría de las probabilidades e iniciar a los estudiantes en la simulación de variables aleatorias continuas en el ejemplo de un fenómeno concreto.

No es posible prever el alcance de tales actividades, pero es tal la importancia y actualidad del conocimiento del movimiento browniano y de las técnicas de Montecarlo, que podemos esperar que en un futuro sean típicas durante la formación universitaria en algunas especialidades. A ello contribuirá, sin dudas, crear materiales de calidad que sirvan a la educación a distancia.

## Referencias

1. R. Valdés y V. Tricio, Tecnologías multimedia e *hipermedia* en el estudio del movimiento browniano, Resúmenes de comunicaciones. XXX Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física (Septiembre de 2005).

2. R. Valdés y V. Tricio, Actividades experimentales en Física General con fotografía y vídeo digitales, IV Taller Iberoamericano de Enseñanza de la Física Universitaria (2007)

3. R. Newburgh, J. Peidle, J. and W. Rueckner, Einstein, Perrin, and the reality of atoms: 1905 revisited; American Journal of Physics, Volume 74, Issue 6, pp. 478-481 (June 2006).

4. R. Valdés y V. Tricio, Experiencias de elaboración y uso de la fotografía digital en la resolución de problemas docentes de física, 100cias@uned. N° 8, pp. 144 – 151 (2005).