

Par-electrónico-relativista en el átomo multielectrónico: I. Generalidades

Juan J. Parera López, Eduardo Roca Oria, Luis Grave de Peralta Morell, Roberto López Boada. Dpto. Física General y Teórica, Facultad Físico-Matemática, Universidad de Oriente

RESUMEN

Se generaliza la teoría de los pares de correlación al caso relativista y de aquí se introduce una ecuación del tipo Bethe-Salpeter que describe el par de electrones relativistas moviéndose en el potencial nuclear y en el de Hartree-Fock-Dirac de los restantes electrones.

ABSTRACT

The theory of pair-correlation is generalized to the relativistic case and then it is introduced a Bethe-Salpeter type equation in order to describe the relativistic electron pair.

INTRODUCCIÓN

La necesidad de consideración de efectos relativistas en átomos está motivada, desde el punto de vista teórico, por la intención de una descripción más exacta de dicho sistema físico, de acuerdo a las exigencias de la Teoría de la Relatividad, que conlleva a un refinamiento de la exactitud de los cálculos. Desde el punto de vista práctico es exigencia del aumento de precisión de los aparatos de medición vinculados al estudio de sistemas físicos reales cuyo conocimiento exige tal precisión. Así sucede en la investigación de los espectros de átomos pesados y sus iones. En la actualidad tiene gran interés para el estudio de los procesos que ocurren en la corona solar y otros cuerpos estelares, así como en condiciones de laboratorio, vb en el estudio del plasma, /1/.

La inclusión más sencilla de dichos efectos a la teoría no relativista se obtiene como correcciones perturbativas a la ecuación de Schrodinger o más precisamente desde la ecuación de Pauli. Una consideración más rigurosa se logra a través de la ecuación de Dirac; que en el caso sencillo de un electrón en el campo estacionario de Coulomb nuclear, es completamente relativista, y aún cuando puede lograrse una solución analítica exacta en ese caso, carece de interés práctico (salvo con iones hidrogenoides de Z elevada), pues su resolución en la aproximación de Pauli permite determinar los niveles con una exactitud $(\alpha Z)^4$ donde $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$, es la denominada constante de estructura fina, y su orden siguiente de precisión resulta superior al orden de los efectos cuantoelectrodinámicos denominados "correcciones radiativas", que comienzan con la magnitud $\alpha(\alpha Z)^4$, y que no son considerados en la ecuación de Dirac. En el caso de átomos multielectrónicos se parte del hamiltoniano no perturbado suma de los hamiltonianos de Dirac de cada electrón en el campo coulombiano nuclear y la interacción entre electrones se incluye (inclusión que destruye la covarianza de la ecuación así formulada) como potencial de interacción, compuesto por la interacción coulombiana instantánea y la interacción de las densidades de corriente de los electrones, esta última en el caso de átomos ligeros o electrones externos de átomos pesados se aproxima por el operador de Breit /2,3,4/. La aplicación del método de Hartree-Fock-Dirac ha posibilitado la realización de cálculos muy precisos mediante tal esquema /5,6/. Debe señalarse que en la aplicación de este esquema aparecen dificultades debido a la presencia de estados de energía negativo /7/, dificultades resolubles introduciendo en el hamiltoniano operadores proyección sobre el subespacio de estados de energía positivos /7,8/.

Usualmente la interacción entre electrones se divide en la interacción coulombiana instantánea, que conduce a los efectos llamados "de correlación", y la interacción magnética, la que junto a la variación de la masa con la velocidad, conduce a los efectos propiamente denominados relativistas. Los efectos de correlación han sido ampliamente estudiados con los métodos de la teoría cuántica no relativista, ver Sec.I. Debemos destacar que con el aumento de la precisión de los cálculos se hace necesaria la inclusión del movimiento y la estructura nuclear /3/. Con el aumento de Z aumenta la velocidad de los electrones atómicos y se hacen más notables los efectos relativistas; ya para $Z \geq 30$ es necesaria una descripción completamente relativista del átomo.

La descripción totalmente relativista del átomo, sólo se logra con los métodos cuantoelectrodinámicos, donde se considera simultáneamente y en toda su complejidad la interacción entre electrones y de estos con el núcleo, y de ellos con el campo cuantizado de radiación y el vacío de Dirac. En este modelo el átomo constituye un sistema de partículas ele-

mentales intercambiando entre sí y con el campo externo, fotones, con la consiguiente aparición de pares electrón-positrón en el vacío de Dirac. La resolución de tal tarea se logra mediante la teoría covariante de perturbaciones, ilustrable mediante los diagramas de Feynman, y aparece la necesidad de renormalizar la masa y la carga del electrón y de extraer las divergencias infrarrojas /4,9/. Esta tarea ha sido resuelta con gran exactitud en el caso del átomo e iones, hidrogenoideos, en la aproximación del electrón, moviéndose en el campo externo estacionario puramente coulombiano nuclear, desde los primeros éxitos de la Electrodinámica Cuántica posteriores a la introducción, por Feynman en 1948, de la teoría covariante de perturbaciones. La mayor dificultad del problema reside en la necesidad de utilizar el propagador (Función de Green) relativista del electrón en el campo de Coulomb que tiene una expresión complicada. Esta dificultad en el caso del átomo de hidrógeno e iones hidrogenoideos de Z pequeña, se resuelve a través del desarrollo de dicho propagador en potencias del potencial coulombiano ($\alpha Z \ll 1$), Fig.1, donde la línea recta doble, representa el propagador en el campo de Coulomb, la línea recta sencilla, el propagador del electrón libre y la línea ondulada con la cruz en el extremo, el potencial de Coulomb. Las primeras correcciones radiativas al movimiento del electrón en el campo de Coulomb se representan por los diagramas de la figura 2 en los que la línea ondulada representa el fotón emitido y reabsorbido y la línea doble cerrada en círculo, la polarización del vacío de Dirac por excitación de un par.

El cálculo de sus contribuciones puede dividirse en dos regiones caracterizadas por la energía del fotón. En la región de energías relativistas basta con considerar la primera potencia del desarrollo del propagador del electrón, figura 3, mientras que en la región de energías no relativistas es necesaria la consideración del propagador exacto, pero que puede usarse en aproximación no relativista, debido al teorema de Furry en la corrección radiativa más baja sólo contribuye el diagrama figura 2(a), cuya contribución es la conocida expresión del logaritmo de Bethe, obtenida por este /10/ desde un enfoque no relativista del problema e introduciendo la renormalización de la masa, /4,9/. Es interesante destacar la posibilidad de inclusión de los efectos cuantoelectrodinámicos en una ecuación del tipo dirac generalizada /4/, que para estados estacionarios y con notación de /4/ tiene forma:

$$H_{DR} \psi(\vec{r}) + i \int_V \gamma_4 \sum_E (\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3r' = E \psi(\vec{r}) \quad (1)$$

donde H_{DR} es el hamiltoniano de Dirac con correcciones radiativas al 4-potencial electromagnético A_μ , ψ es un biespinor de Dirac y E , la auto masa del electrón, corresponde al diagrama de figura 2(a).

En el caso del átomo de dos electrones, en la aproximación de núcleo infinitamente pesado, puntual y sin estructura, el problema fue resuelto por Araki /11/ partiendo de la ecuación relativista de 2 cuerpos introducida por Bethe y Salpeter /12/ y que ya Salpeter había aplicado para considerar efectos cuantoelectrodinámicos en el átomo de hidrógeno incluyendo movimiento del núcleo /13/ y por Arnowitt en el cálculo de la estructura hiperfina del mismo átomo /14/. En términos de la función de Green del sistema de 2 partículas:

$$G_{ijkl}(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = i^2 \langle \psi_0 | T \left\{ \psi_i(x_1) \psi_j(x_2) \bar{\psi}_k(x'_1) \bar{\psi}_l(x'_2) \right\} | \psi_0 \rangle \quad (2)$$

donde ψ_0 es el vacío físico con la interacción considerada, $\psi_i, \bar{\psi}_k = \psi_k^\dagger \gamma_4$ son los operadores de Dirac del campo electrón-positrón en representación de Heisenberg, y es la matriz β de Dirac, $x \equiv (\vec{r}, t)$. Los índices i, j, k, l describen las propiedades espinoriales del campo en cuestión. G puede calcularse por perturbaciones y resulta conveniente trabajar con su transformada de Fourier respecto a los tiempos y su desarrollo en el conjunto completo de las funciones de onda de un electrón en el campo coulombiano nuclear: $G_{n_1 n_2 n'_1 n'_2}(\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon'_1, \epsilon'_2)$ donde las n 's caracterizan los estados del electrón en dicho campo y los ϵ 's son las frecuencias del desarrollo de Fourier en los tiempos. Esta función satisface la referida ecuación de Bethe-Salpeter:

$$G = G_0 + G_0 I G \quad (3)$$

que es una ecuación matricial-integral. G_0 es la función de Green correspondiente en el caso que no haya interacción entre partículas, dada por el producto tensorial de las funciones de Green de una partícula en el campo coulombiano nuclear. I es el operador de interacción definido como suma de las expresiones correspondientes a todos los gráficos irreducibles de interacción, figura 4. Si iteramos (3) obtenemos: (ver figura 4) el desarrollo perturbativo de G ilustrado en la figura 5.

La dificultad esencial de este problema lo es el hecho de que cada partícula posee su tiempo propio, que aparece explícitamente en los argumentos de G (o bien su frecuencia correspondiente). Esta dificultad se ha subsanado igualando los tiempos de ambas partículas (o integrando sus energías relativas) y formulando el problema de forma análoga al caso no relativista. Recientemente Braun y colaboradores han desarrollado este enfoque /15, 16/. Hay que señalar que Schwinger en el mismo año que Bethe y Salpeter también introdujo una ecuación relativista para el sistema de 2 partículas /17/, una discusión minuciosa de su enfoque puede verse en /18/.

La generalización de tal enfoque al caso del átomo multielectrónico presenta la dificultad de la imposibilidad de escribir una ecuación de

tipo Bethe-Salpeter, además de los conocidos problemas cuantoelectrodinámicos con las divergencias infrarrojas. Destacamos que la idea desarrollada por nosotros en el presente artículo permite darle una solución aproximada a la primera dificultad. En el caso de átomos ligeros multi-electrónicos, por Braun y Labzovskii fue propuesto un esquema /19/, en el cual en lugar de la ecuación de Bethe-Salpeter se introduce una ecuación tipo Schrödinger con potenciales de interacción entre los electrones y de estos con el núcleo. Para evitar las dificultades con las divergencias infrarrojas dividen la contribución del campo electromagnético (como es habitual) en una parte "blanda" y otra "dura", la interacción debida a la parte dura se incluye mediante potenciales y la contribución de la blanda se incluye explícitamente en la ecuación de Schrödinger. Así calcularon correcciones hasta los órdenes α^5 y $\frac{m}{M} \alpha^4$ donde $\frac{m}{M}$ es la razón de las masas electrónicas y nuclear.

En el caso de átomos multielectrónicos pesados, además de las dificultades anteriores se tiene que al moverse cada electrón en un campo efectivo Z_{ef} debido al núcleo y a los restantes electrones (cuya contribución "apantalla" el nuclear), es necesario distinguir los efectos relativistas según la "profundidad" de electrón. Así para electrones exteriores $Z_{ef} \alpha \ll 1$ son válidos los métodos aplicados en átomos ligeros, para interiores ($Z_{ef} \alpha \sim 1, 1/Z_{ef} \ll 1$) no es válida la aproximación no relativista, no obstante aquí debido a la gran intensidad de la atracción nuclear y la pequeñez relativa (de orden $1/Z_{ef}$) de la interacción electrónica, los electrones pueden considerarse interactuantes; con esta aproximación se han hecho numerosos cálculos para electrones K de átomos pesados /20/ con la particularidad que en ellos se renormaliza en el campo de Coulomb. En la profundidad intermedia ($Z_{ef} \alpha \ll 1, 1/Z_{ef} \ll 1$) se tiene una región interesante en que serían válidas las aproximaciones de las otras dos regiones, esta región es objeto de interés presente y pasado /16/ de los autores.

Una vía al problema de la consideración de efectos cuantoelectrodinámicos en átomos pesados multielectrónicos parte de considerar el movimiento de cada electrón en el campo de Hartree-Fock-Dirac de los restantes y el nuclear, /21/. Aplicando una calibración mixta para el propagador del fotón, en la que dicho propagador en el caso de fotones intercambiados entre electrones distintos se toma en calibración de Coulomb:

$$D_{00}(K) = \frac{1}{K^2} ; D_{0i}(K) = 0 ; D_{ij}^+(K) = \frac{1}{K^2} \left[\delta_{ij} - \frac{K_i K_j}{K^2} \right]$$

es posible separar los efectos de correlación electrónica, que se dejan al margen, de los debidos a la interacción magnética. Estos últimos se tratan por teoría covariante de perturbaciones. En particular en /21/ se discute el corrimiento Lamb para el electrón en el campo nuclear más el de Hartree-Fock-Dirac de los restantes.

I. CORRELACIÓN ELECTRÓNICA

Se denomina correlación electrónica a los efectos debidos a la interacción coulombiana instantánea entre electrones y no contenidos en la aproximación de Hartree-Fock que considera la interacción promedio, vb. la energía de correlación se define: $E_{\text{corr}} = E_{\text{NR}} - E_{\text{HF}}$ siendo E_{NR} la energía exacta no relativista y E_{HF} la energía del sistema obtenida por el método de Hartree-Fock. Estos efectos han sido exhaustivamente estudiados con los métodos de la teoría cuántica no relativista incluidos los de la Teoría Cuántica de los campos en su versión no relativista /22/. De los resultados se ha comprobado que en átomos los efectos más importantes son los de correlación entre dos electrones y que en el caso de átomos ligeros, su única consideración aproxima con gran exactitud los efectos totales. Este hecho ha servido como fundamentación al desarrollo de las teorías denominadas de "pares de correlación", en las que el sistema se contempla a través de los binomios o pares electrónicos moviéndose en el "mar de Hartree-Fock" /23/. En cuanto a la aplicación de métodos de la Teoría Cuántica de los Campos en este problema /22, 24/, gran popularidad ha tenido la denominada Teoría de Perturbaciones de Brueckner-Goldstone con la cual se ha logrado gran precisión en el cálculo de la energía de correlación y otras magnitudes físicas /25/.

II. ECUACIÓN RELATIVISTA PARA EL PAR ELECTRÓNICO

Consideremos el átomo de N electrones en la aproximación de núcleo infinitamente pesado, sin estructura, sólo caracterizado por su carga eléctrica Ze. Supongamos resuelto el problema de la determinación de los orbitales unielectrónicos biespinores $\psi_i(x_j)$, y sus autovalores correspondientes ϵ_i , en la aproximación de Hartree-Fock-Dirac, esto es el sistema de ecuaciones resuelto:

$$\left[h(i) + \sum_{j=1}^N \int \psi_j^\dagger(x_j) v(i,j) \psi_j(x_j) dx_j \right] \psi_i(x_i) - \sum_{j=1}^N \int \psi_j^\dagger(x_j) v(i,j) \psi_i(x_j) dx_j \psi_j(x_i) = \epsilon_i \psi_i(x_i) \quad (4)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$ numera los electrones, $h(i) = c\bar{\alpha}_i \cdot \bar{p}_i + mc^2\beta_i - \frac{Ze^2}{r_i}$ es el hamiltoniano de Dirac del electrón i-ésimo en el campo coulombiano nuclear, y $v(i,j)$ el operador de energía potencial de interacción entre los electrones i y j. Además de la interacción coulombiana en v se puede incluir la interacción magnética instantánea. Como es bien conocido, en esta aproximación se supone el movimiento independiente de cada electrón en el campo nuclear apantallado por el campo promedio creado por los res-

tantes electrones, y su solución reclama el uso de un método autoconsistente.

Resulta evidente que una mejor aproximación resulta de considerar el movimiento correlacionado de cada par de electrones en el campo compuesto por el coulombiano nuclear y el promedio de los restantes (N-2) electrones, a este último corresponde potencial

$$V^{(N-2)}(i) = \sum_{K=1}^{N-2} \int \psi_K^+(x_K) v(i,K) \psi_K(x_K) dx_K \quad K \neq i, j$$

siendo las ψ 's las soluciones de (4) e incluyen el efecto del total de electrones. Que la aproximación es mejor que la de Hartree-Fock sigue del hecho que ahora se incluye la interacción instantánea entre los dos electrones del par considerado. De esta forma la función de onda $\Phi(x_i, x_j)$ que describe el par de electrones $i - j$ satisface:

$$\left[h(i) + h(j) + V^{(N-2)}(i) + V^{(N-2)}(j) + v(i,j) \right] \Phi(x_i, x_j) = \epsilon_{ij} \Phi(x_i, x_j) \quad (5)$$

donde $\Phi(i,j)$ debe antisimetrizarse ante la permutación de i, j , y se impone como condición adicional su ortogonalidad a todos los orbitales de Hartree-Fock-Dirac ocupados por los restantes (N-2) electrones.

$$\langle \psi_K | \Phi(x_i, x_j) \rangle = 0 \quad \forall K \neq i, j; K \leq N \quad (6)$$

de esta forma la influencia del resto de los electrones sobre los dos del par se hace sentir no sólo a través del potencial promedio $V^{(N-2)}$, sino también a través del Principio de Exclusión expresado por (6). En (5) la suma de operadores se entiende en términos de suma tensorial $v \cdot h(i) + h(j) = h(i) \otimes I + I \otimes h(j)$, y ϵ_{ij} sería la energía del par electrónico.

Resulta interesante destacar que si buscamos a Φ en (5) como producto de orbitales unielectrónicos $\Phi(x_i, x_j) = \phi(x_i) \phi(x_j)$ (7)

y tomamos el producto escalar de (5), después de sustituir (7) por una de las ϕ , obtendríamos nuevamente (4), esto es $\phi \equiv \psi$ (más precisamente introduciendo el producto (7) antisimetrizado).

En este proceso veríamos que:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_i + \epsilon_j - [\langle ij | v(i,j) | ij \rangle - \langle ij | v(i,j) | ji \rangle] \quad (8)$$

hecho esperado, pues los elementos matriciales de v descuentan la energía de interacción entre los electrones i, j , incluida 2 veces en la suma $\epsilon_i + \epsilon_j$ como se conoce.

La solución exacta de (5) podemos buscarla desarrollando en la base de los productos (tensoriales) de pares de orbitales ψ , soluciones de (4), al someter tal expresión a (6) excluiríamos los productos en que al menos uno

de los factores ψ_k pertenezca a los orbitales ocupados con $K \neq i, j$, y obtenemos un desarrollo

$$\Phi(x_i, x_j) = C_{ij}^{ij} \hat{A} \psi_i(x_i) \psi_j(x_j) + \hat{A} \sum_{K, L=N+1}^{\infty} C_{KL}^{ij} \psi_K(x_i) \psi_L(x_j) \quad (9)$$

donde los C_{KL}^{ij} son los coeficientes de Fourier del desarrollo y \hat{A} el operador de antisimetrización. El segundo término de la derecha incluye propiamente los efectos de la correlación relativista del par i, j y físicamente, cada uno de sus términos corresponde a la excitación del par a niveles sobre la energía de Fermi.

Si en (5) incluimos en v el operador de Breit para la interacción entre electrones /5/

$$V_B(i, j) = \frac{-e^2}{2r_{ij}} \left[\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j + \frac{\vec{\alpha}_i \cdot \vec{r}_{ij} \vec{\alpha}_j \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \right]$$

obtendremos la descripción del par a través de una ecuación del tipo Breit, con la característica que los electrones se mueven en el potencial nuclear apantallado por el de Hartree-Fock-Dirac de los restantes. La utilización de la ecuación así obtenida constituirá una aproximación a la consideración de efectos relativistas no incluidos en la descripción de Hartree-Fock-Dirac, y su aplicación con este fin traería aparejada las dificultades destacadas en el caso de la ecuación de Breit usual.

III. ECUACIÓN DE BETHE-SALPETER PARA EL PAR ELECTRÓNICO

A continuación introducimos una ecuación del tipo Bethe-Salpeter /12,17/ para el par-electrónico-relativista. Lo hacemos de forma muy intuitiva basados en la situación análoga del átomo de 2 electrones; en artículo posterior discutiremos con rigor la obtención de tal ecuación.

Para lograr una formulación relativista-covariante de la descripción dinámica del par-electrónico-relativista, recurramos al caso análogo del movimiento de 2 electrones en el campo coulombiano nuclear (átomo de dos electrones), el primer caso sigue del segundo si sustituimos el potencial nuclear por el efectivo (nuclear + potencial de HFD) de los restantes electrones. Así el par, dinámicamente, será descrito por una ecuación del tipo Bethe-Salpeter, (3) con nuevo potencial: el efectivo:

$$G = G_0 + G_0 I G \quad (10)$$

donde G es el propagador o función de Green del sistema de los 2 electrones del par en el campo efectivo e I el operador interacción en dicho campo. La interacción de (10) conduce al desarrollo perturbativo de G

ilustrado en la figura 6, donde con la triple línea continua, representamos el propagador unielectrónico en el campo efectivo.

CONCLUSIONES

Hemos reducido el problema de N electrones en el átomo relativista a problemas de dos electrones en el potencial efectivo nuclear + potencial HFD de los restantes electrones: par electrónico-relativista (PER).

La ecuación para el PER la obtuvimos en 2 etapas: primero se introdujo una ecuación del tipo Breit para el par, (5), mediante la cual es posible la consideración de efectos relativistas en los menores órdenes de α (efectos de estructura fina), luego se introdujo una ecuación relativista completamente covariante, del tipo Bethe-Salpeter.

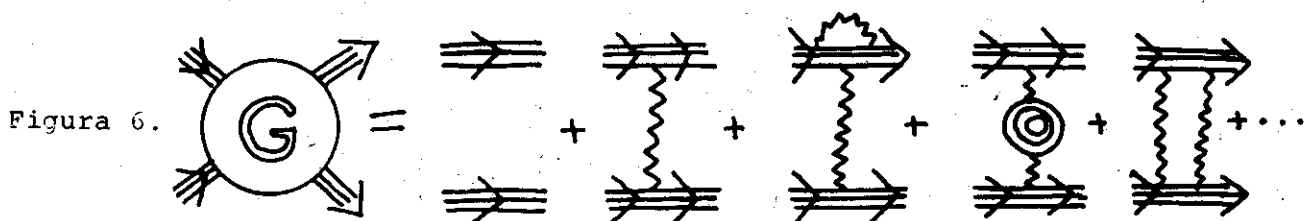
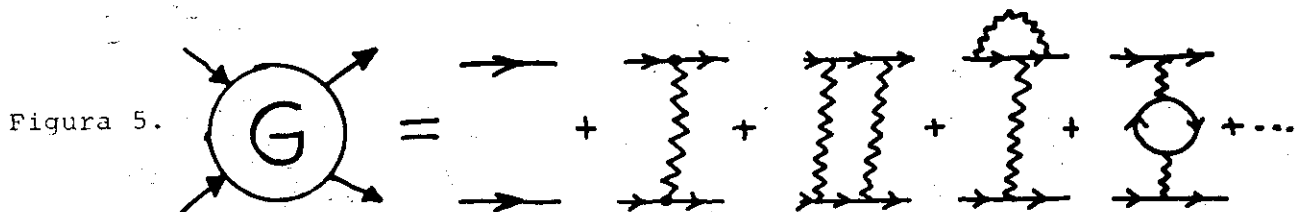
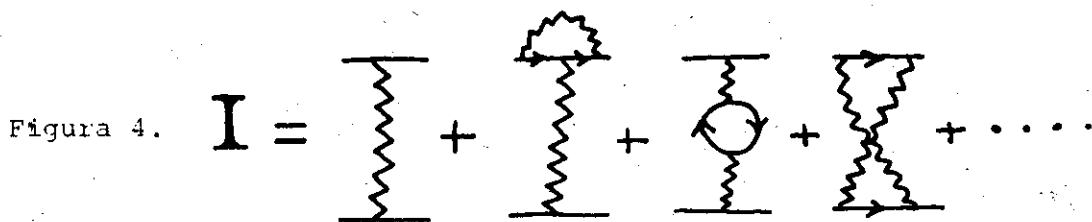
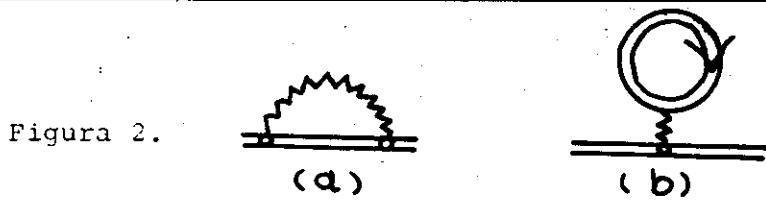
Sobre la verosimilitud de nuestra teoría, esta está asegurada por la de las otras dos teorías, de las cuales es generalización, y que están ampliamente confirmadas en la práctica, pues la nuestra constituye una mejor aproximación que la teoría de Hartree-Fock-Dirac y es reducible a ella en el caso que los electrones se consideren "independientes". Por otra parte en el límite no relativista conduciría a la teoría de pares de correlación confirmada con alta exactitud en el caso de átomos ligeros, así la nueva teoría incluiría correcciones relativistas en la interacción intrapar de correlación.

Como nuevas virtudes de la teoría de PER tenemos:

1. Consideración simultánea de efectos de correlación y relativistas, aspecto necesario en átomos con $Z \geq 10$.
2. Reducción aproximada del problema de N electrones relativistas al de 2, el cual está suficientemente estudiado. Desde este punto de vista posee valor metodológico, pues da una vía de estudio y cálculo del problema complicado por reducción a uno más simple.

AGRADECIMIENTOS

Uno de los autores (J.J) agradece a los doctores M.A.Braun y L.N. Labzovskii, de las cátedras de Teoría del Núcleo y Partículas Elementales (M.A.B.) y Mecánica Cuántica (L.N.L.), de la Universidad estatal de Lenin grado, por las discusiones científicas, además, al primero, por la discusión del artículo.



Par electrónico relativista en el
átomo multielectrónico:

I. Generalidades

BIBLIOGRAFÍA

1. Kononov, E.Ia.; K.N.Koshelev; A.N.Riabtsev;
Opt. i Spekt., 996 (1971) (en ruso).
2. Breit, G.
Phys Rev. 34, 553 (1929); 38, 383 (1929); 39, 616 (1932).
3. Bethe, H.; E.Salpeter
Quant Mech. of one and two electron atoms, Ed.Springer-Varlag
(1957), traducción al ruso Gosydapst.Izdat. Fiz-Mat. Literat.
(1960).
4. Ajiezer, A.I.; V.B.Beresteski
Electrod. Cuánt., Ed.Nauka (1981) (en ruso).
5. Kim, Y.K.
Phys 154, 17 (1967).
6. Pyper, N.C.; P.Marketos
Jour. Phys B 14, 1387 (1981).
7. Brown, G.E.; D.G.Ravenhall
Proc. Roy. Soc. A.208, 532 (1951)
8. Mittleman, M.H.
Phys Rev. A 24, 1167 (1981).
9. Jauch, J.M. .Rohlich
The theory of photons and electrons, Ed. 2da, Addison Wesley
Publishing Company 1959.
10. Bethe, H.A.
Phys Rev. 72, 339 (1947).
11. Araki, G.
Prog. Theor Phys 17, 619 (1957).
12. Salpeter, E.E.; H.A.Bethe
Phys Rev. 84, 1232 (1951).
13. Salpeter, E.E.
Phys Rev. 87, 328 (1952).
14. Arnowitt, R.
Phys Rev. 92, 1002 (1953).
15. Braun, A.A.
Teoret. Matemat. Fiz 34, 59 (1978) (en ruso).
16. Braun, M.A.; J.Parera; E.Roca
Vest. Lening. Univ. Fiz, No.4, 5 (1979) (en ruso).
17. Schwinger, J.
Proc. Natl. Acad. Sci. US 37, 452 (1951).

18. Schwinger, J.
Particles, Sources and fields, Ed. Addison-Wesley (1973).
Traducción al ruso Ed. Mir (1976).
19. Braun, M.A.; L.N.Labzovskii
JETP 28, 1017 (1968).
20. Labzovskii, L.N.
JETP 59, 2165 (1970) (en ruso).
21. Braun, M.A.; Yu.Yu. Dmitriev; L.N.Labzovskii
JETP 30, 1188 (1970).
22. Sinanoglu, O.; K.A.Brueckner
Three Approaches to electron correlation in atoms, Ed. Univ.
Press (1970).
23. Sinanoglu, O.
Jour Chem Phys 36, 706 (1962); Ad. Chem. Phys 6, 315 (1964).
24. Tolmachev, V.
Lit. Fiz. Sbor. 3(4), 47 (1963) (en ruso).
25. Kelly, H.P.
Phys Rev. 131, 684 (1963), 136, B 896 (1964); 144, 39 (1966);
152, 62 (1966); 173, 142 (1968); 180, 55 (1969).

Recibido: 24 de febrero de 1985.